

$xf(x)+2f(1-x)=x^2+6$

$\sqrt{x^2+(8-y)^2}+\sqrt{y^2+(6-x)^2}$

Jaunajam matematikui



$f(x)=|x-1|+|x+1|$

$\pi^2(k+1)^2-\pi^2k^2=\pi^2(2k+1)$

$1=4\sin\frac{\pi}{10}\left[1-2\sin^2\frac{\pi}{10}\right].$

$m_3=m_{12}+m_{13}+m_{23}$

LIETUVOS
JAUNŲJŲ
MATEMATIKŲ
MOKYKLA
LJMM

8

LIETUVOS JAUNŲJŲ MATEMATIKŲ MOKYKLA

Jaunajam matematikui

3

2000–2002 metų
Lietuvos jaunųjų matematikų mokyklos
užduotys ir jų sprendimai

Danieliaus leidykla

Vilnius, 2002

UDK 51(079)
Ja712

Leidinio sudarytojai:

Antanas APYNIS
Eugenijus STANKUS
Juozas ŠINKŪNAS

Leidinį recenzavo:

Ona JABLONSKIENĖ
Marytė STRIČKIENĖ

Leidinį redagavo Joana PRIBUŠAUSKAITĖ

Lietuvos Respublikos švietimo ir mokslo ministerijos
rekomenduota 2002-11-05 Nr. 171

ISBN 9955-476-16-8

TURINYS

PRATARMĖ

Į skaitytojų rankas atiduodame jau trečią Lietuvos jaunųjų matematikų mokyklos uždavinių knygelę. Į ją sudėjome visą 2000-2002 mokslo metais skelbtą medžiagą. Per šiuos mokslo metus LJMM klausytojai turėjo progą giliau susipažinti su skaičių dalumu, grandininėmis trupmenomis, aritmetiniu, geometriniu, harmoniniu vidurkiais ir jų taikymais bei skaičių sekomis. Taip pat buvo nagrinėtos iracionaliosios bei trigonometrinės lygtys ir nelygybės. Nepamiršome ir geometrijos – moksleiviams buvo pasiūlyta skaičiuoti figūrų plotus, taikyti vektorius planimetrijos uždaviniams spręsti.

Norėtume, kad ši knygelė, kaip ir ankstesnės dvi, būtų skaitoma, padėtų moksleiviams geriau suprasti matematiką ir leistų jiems geriau pasirengti studijoms aukštosiose mokyklose. Manome, kad ji galėtų būti naudinga ir matematikos mokytojams.

Dėkojame straipsnių autoriams už kruopštų užduočių rengimą, kolegei Kristinai Lyndienei, labai rūpestingai rinkusiai bei maketavusiai visą tekstą, ir apskritai visiems, prisidėjusiems prie šios knygelės pasirodymo.

Sudarytojai A. Apynis, E. Stankus, J. Šinkūnas

Metodinė medžiaga ir užduotys



STOJAMOJI UŽDUOTIS

Antanas Apynis, Eugenijus Stankus (Vilniaus universitetas),
Juozas Šinkūnas (Vilniaus pedagoginis universitetas)

1. Suprastinkite reiškinį

$$\frac{3(ab)^{\frac{1}{2}}-3b}{a-b}+\frac{(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}})^3+2a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}}}.$$

2. Iš dviejų miestų A ir B vienas prieš kitą vienu metu išvyko motociklininkas ir dviratininkas. Važiuodami pastoviais greičiais, jie susitiko po 45 min. Per kiek laiko motociklininkas iš miesto A nuvažiavo į miestą B, jeigu kelionėje jis užtruko dviem valandomis ilgiau negu dviratininkas, važiuodamas iš B į A?

3. Išspręskite nelygybę

$$\frac{9}{(x+1)^2}\geq 1.$$

4. Įrodykite nelygybę

$$a^2+b^2+1\geq ab+a+b;$$

čia a ir b – bet kokie realieji skaičiai.

5. Raskite penkiaženklius skaičius $\overline{34x5y}$ (x – šimtų skaitmuo, y – vienetų skaitmuo), kurie dalijasi iš 36.

6. Įrodykite, kad trupmena $\dfrac{2x+3}{5x+7}$ yra nesuprastinama, kai x – sveikasis skaičius.

7. Apskaičiuokite

$$\sin^4\frac{\pi}{16}+\sin^4\frac{3\pi}{16}+\sin^4\frac{5\pi}{16}+\sin^4\frac{7\pi}{16}.$$

8. Raskite daugianario

$$P(x) = (x^2 + 2x + 2)^7 + (x^2 - 3x - 3)^7$$

koeficientų prie nelyginių x laipsnių sumą.

9. Išspręskite lygčių sistemą

$$\begin{cases} x^2 - 4y^2 - xy + 5y = 1, \\ x^2 + 3y^2 - xy - 4y = -1. \end{cases}$$

10. Trapecijos $ABCD$ pagrindas BC yra apskritimo skersmuo. Šis apskritimas liečia pagrindą AD ir eina per trapecijos įstrižainių vidurio taškus. Raskite trapecijos kampus.



I. SKAIČIŲ DALUMAS

Eugenijus Stankus
(Vilniaus universitetas)

Mokykliniame matematikos kurse sveikųjų skaičių dalumo klausimai plačiai nenagrinėjami. Apsiribojama sveikųjų skaičių kai kuriais dalumo požymiais bei didžiausiu bendruoju dalikliu ir mažiausiu bendruoju kartotiniu. Norėtųsi išplėsti moksleivių žinias sveikųjų skaičių dalumo tema.

Dviejų sveikųjų skaičių suma, skirtumas bei sandauga yra sveikasis skaičius. Tačiau dalijant sveikąjį skaičių iš sveikojo ne visuomet gaunamas sveikasis skaičius. Šiems klausimams nagrinėti ir skirta ši tema.

Sveikuosius skaičius čia žymėsime a, b, c, ..., sveikųjų skaičių aibę, kaip įprasta, žymėsime Z, o natūraliųjų – N, t.y. N = {1, 2, 3, ...,}.

Apibrėžimas. Sakoma, jog skaičius a dalijasi iš *skaičiaus* b (žymima: $b|a$; skaitoma: b dalija a), jeigu yra toks skaičius c, su kuriuo galioja lygybė $a = bc$ $(a \in Z, b \in Z,\ b \neq 0)$.

Skaičiai b ir c vadinami skaičiaus a *dalikliais*.

Pavyzdžiui, skaičius 14 dalijasi iš 7 (žymime $7|14$), 14 dalijasi iš 2 ($2|14$), taip pat $1|14$ ir $14|14$. Natūralieji skaičiai kurie dalijasi tik iš savęs ir iš vieneto, vadinami *pirminiais skaičiais*. Tokie skaičiai yra, pavyzdžiui: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, ... Pirminių skaičių yra be galo daug. Šį faktą IV a.pr. Kr. įrodė Euklidas.

Suformuluosime pagrindines sveikųjų skaičių dalumo savybes, kuriomis dažnai remsimės tolesniuose samprotavimuose.

Sveikųjų skaičių dalumo savybės:

1) jei $a \neq 0$, tai $a|a$;

2) jeigu $a|b$ ir $b|c$, tai $a|c$;

3) jei $a|b$ ir $b|a$, tai $|a| = |b|$;

4) jei $a|b$ ir $|a| > |b|$, tai $b = 0$;

5) jeigu $a|b$ ir $a|c$, tai $a|b \pm c$;

6) jei su skaičiais a_1, a_2, ..., a_m ir b_1, b_2, ..., b_n galioja lygybė

$$a_1 + a_2 + ... + a_m = b_1 + b_2 + ... + b_n,$$

ir apie visus dėmenis, išskyrus vieną, žinoma, jog jie dalijasi iš a, tuomet ir šis dėmuo dalijasi iš a.

Labai svarbus teiginys, kuris naudingas ne tik tyrinėjant skaičių dalumą, yra **pagrindinė aritmetikos teorema**:

Bet kuris natūralusis skaičius n vieninteliu būdu išreiškiamas pirminių skaičių sandauga: $n = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot p_m^{k_m}$; čia $p_1, p_2, \ldots, p_m$ yra pirminiai skaičiai, rodikliai $k_1, k_2, \ldots, k_m$ – kurie nors natūralieji skaičiai.

Kai skaičius n nedidelis, tai jį išskaidyti pirminiais dauginamaisiais paprasta. Pavyzdžiui, $6 = 2 \cdot 3$, $24 = 2^3 \cdot 3$, $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$, $45 = 3^2 \cdot 5$ ir pan. Ieškant natūraliojo skaičiaus skaidinio pirminiais dauginamaisiais, surasti visus jo pirminius daliklius patogu tokiu būdu:

126	2	320	2	728	2	325	5
63	3	160	2	364	2	65	5
21	3	80	2	182	2	13	13
7	7	40	2	91	7	1	
1		20	2	13	13		
		10	2	1			
		5	5				
		1					

Iš čia matome jog $126 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7$, $320 = 2^6 \cdot 5$, $728 = 2^3 \cdot 7 \cdot 13$, $325 = 5^2 \cdot 13$. Žinoma, taikant šį pirminių daliklių ieškojimo būdą, pravartu žinoti pagrindinius sveikųjų skaičių dalumo požymius.

1. Skaičius dalijasi iš 2 tik tuomet, jeigu jo paskutinis skaitmuo yra arba 0, arba 2, arba 4, arba 6, arba 8.

2. Skaičius dalijasi iš 3 tik tada, kai jo skaitmenų suma dalijasi iš 3.

Pastaba. Taip pat formuluojamas ir dalumo iš 9 požymis: skaičius dalijasi iš 9 tik tada, kai jo skaitmenų suma dalijasi iš 9.

3. Iš 5 dalijasi tik tie skaičiai, kurių paskutinis skaitmuo yra arba 0, arba 5.

4. Tikrinant natūraliojo skaičiaus n dalumą iš 7 bei 13, jį reikia užrašyti formule

$$n = 10a + b \quad (0 \le b < 10).$$

Skaičius n dalijasi iš 7 tik tuomet, kai skaičius $a - 2b$ dalijasi iš 7.

Skaičius n dalijasi iš 13 tik tuomet, kai skaičius $a+4b$ dalijasi iš 13.

5. Iš 11 dalijasi tiktai tie skaičiai, kurių skaitmenų, esančių nelyginėse vietose, suma arba lygi skaitmenų, esančių lyginėse vietose, sumai, arba skiriasi nuo jos skaičiumi, kuris dalijasi iš 11.

Panašiai formuluojami dalumo požymiai iš 17, 19, 23, 29, 31.

Dalumo iš 2 ir dalumo iš 5 požymių įrodymai paprasti – užtenka pasinaudoti penktąja dalumo savybe (pabandykite įrodyti). To negalėtume tvirtinti apie kitų požymių įrodymus. Norint įrodyti šiuos požymius, reikėtų žinoti ir šiaip įdomias dalybos su liekana savybes. Sveikojo skaičiaus a dalybos iš m ($m \in \mathrm{N}$) su liekana veiksmas apibrėžiamas lygybe $a = mq + r$, kurioje q – dalmuo ($q \in \mathrm{Z}$), o r – liekana, $0 \leq r < m$.

Atskiru atveju, kai $r = 0$, gauname, jog a dalijasi iš m ($m \mid a$).

Būtų nesunku įrodyti, jog bet kuriam sveikajam skaičiui a ir natūraliajam m egzistuoja *vienintelė* sveikųjų skaičių q ir r, $0 \leq r < m$, pora, su kuria galioja lygybė $a = mq + r$ (įrodykite).

Pavyzdžiui, tegu $a = 25$, $m = 7$. Tuomet $25 = 7 \cdot 3 + 4$, taigi $q = 3$, $r = 4$. Kai $a = -25$, $m = 7$, gausime $-25 = 7 \cdot (-4) + 3$; $q = -4$, $r = 3$.

Dalybos su liekana prireikia ir kasdieniniame gyvenime. Pavyzdžiui, 2000 m. rugsėjo 27 d. buvo trečiadienis. Norėdami nustatyti, kokia savaitės diena buvo po metų, t.y. 2001 m. rugsėjo 27 d., turime dienų skaičių – 365 padalyti iš 7 ir pagal gautąją liekaną nustatyti savaitės dieną. Gauname $365 = 52 \cdot 7 + 1$, todėl 2001 metų rugsėjo 27 d. – ketvirtadienis.

Apibrėžimas. Jei dalijant sveikuosius skaičius a ir b iš m gaunamos vienodos liekanos, t.y. $a = mq_1 + r$ ir $b = mq_2 + r$, $0 \leq r < m$, tai rašoma $a \equiv b(\mathrm{mod}\ m)$ (skaitoma: a lygsta b moduliu m). Pastaroji išraiška yra *lyginys moduliu m*.

1 pavyzdys. Tegu $m = 3$. Tuomet vienodas liekanas, lygias 2 ($r = 2$), turi sveikieji skaičiai $3m + 2$, $m \in \mathrm{Z}$:

$$\ldots, -7, -4, -1, 2, 5, 8, \ldots.$$

Taigi galime rašyti:

$$-7 \equiv 2(\mathrm{mod}\ 3),\ -4 \equiv 5(\mathrm{mod}\ 3),\ 8 \equiv 2(\mathrm{mod}\ 3) \text{ ir pan.}$$

Formos $3m + 1$, $m \in \mathrm{Z}$, skaičiai

$$\ldots, -8, -5, -2, 1, 4, 7, 10, \ldots$$

turi liekaną $r = 1$. Vadinasi,

$$-8 \equiv 1 (\bmod 3), -5 \equiv 1 (\bmod 3), \; 10 \equiv 1 (\bmod 3) \text{ ir t.t.}$$

Skaičiai, kurie užrašomi pavidalu $3m$, $m \in Z$, dalijasi iš 3 ($r = 0$):

$$\ldots, -9, -6, -3, 0, 3, 6, 9, \ldots .$$

Todėl

$$-9 \equiv 0 (\bmod 3), \; -6 \equiv 9 (\bmod 3), \; 9 \equiv 0 (\bmod 3) \text{ ir t.t.}$$

Taigi visi sveikieji skaičiai pagal pasirinktąjį modulį $m = 3$ suskirstomi į tris klases pagal liekanos r galimas reikšmes.

Nesunku patikrinti, kad lyginys $a \equiv b (\bmod m)$ teisingas tik tuomet, kai $a - b$ dalijasi iš m $(m \mid a - b)$. Pagal lyginio apibrėžimą šį faktą galime užrašyti ir taip:

$$a - b \equiv 0 (\bmod m).$$

Lyginių savybės labai panašios į lygčių savybes. Suformuluosime jas:

1) jei $a \equiv b (\bmod m)$, tai $ca \equiv cb (\bmod m)$ ir $a + c \equiv b + c (\bmod m)$ su bet kuriuo sveikuoju skaičiumi c;

2) jei $a_1 \equiv b_1 (\bmod m)$ ir $a_2 \equiv b_2 (\bmod m)$, tai $a_1 + a_2 \equiv$ $\equiv b_1 + b_2 (\bmod m)$ ir $a_1 \cdot a_2 \equiv b_1 \cdot b_2 (\bmod m)$;

3) jei $a \equiv b (\bmod m)$, tai $a^k \equiv b^k (\bmod m)$, $k \in N$.

Remdamiesi lyginių moduliu m apibrėžimu šias savybes pabandykite įrodyti patys.

Panagrinėkime keletą lyginių savybių taikymo pavyzdžių.

2 pavyzdys. Raskime liekaną, kurią gausime skaičių $A = 13^{16} - 2^{25} \cdot 5^{15}$ padaliję iš 3.

Sprendimas. Atkreipkime dėmesį, kad galioja šitokie lyginiai:

$$13 \equiv 1 (\bmod 3) \text{ (nes } 3 \mid 13 - 1\text{)}, \; 2 \equiv -1 (\bmod 3) \text{ (nes } 3 \mid 2 + 1\text{)},$$

$$5 \equiv -1 (\bmod 3) \text{ (nes } 3 \mid 5 + 1\text{)}.$$

Pagal lyginių trečiąją savybę turėsime:

$$13^{16} \equiv 1 (\bmod 3), \; 2^{25} \equiv (-1)^{25} (\bmod 3),$$

t.y.

$$2^{25} \equiv -1 (\bmod 3), \; 5^{15} \equiv -1 (\bmod 3).$$

Pritaikę antrąją savybę, gausime:

$$2^{25} \cdot 5^{15} \equiv (-1) \cdot (-1)(\text{mod}3), \text{ t.y. } 2^{25} \cdot 5^{15} \equiv 1(\text{mod}3).$$

Iš pirmosios savybės išplaukia, jog

$$-2^{25} \cdot 5^{15} \equiv -1(\text{mod}3), \quad 13^{16} - 2^{25} \cdot 5^{15} \equiv 1 - 1(\text{mod}3).$$

Taigi $A \equiv 0(\text{mod}3)$. Kitaip tariant, skaičius A dalijasi iš 3.

Vadinasi, naudojantis lyginių savybėmis galima patikrinti, ar duotasis skaičius dalijasi iš kito skaičiaus, neatliekant dalybos veiksmo ir nesinaudojant dalumo požymiais.

3 pavyzdys. Įrodykime, kad su kiekvienu natūraliuoju n skaičius $n^3 + 14n$ dalijasi iš 3.

Įrodymas. 1 būdas. Bet kurį natūralųjį skaičių dalijant iš 3, galimos liekanos r reikšmės yra: $r = 0$, $r = 1$ ir $r = 2$. Todėl nagrinėsime kiekvieną atvejį atskirai.

Kai $r = 0$, tai $n = 3k$. Tuomet $n^3 + 14n = (3k)^3 + 14 \cdot 3k$. Šis skaičius dalijasi iš 3 pagal penktąją dalumo savybę.

Jei $r = 1$, tuomet $n = 3k + 1$ ir

$$n^3 + 14n = (3k+1)^3 + 14 \cdot (3k+1) = 27k^3 + 27k^2 + 9k + 1 + 42k + 14 =$$

$$3 \cdot (9k^3 + 9k^2 + 17k) + 15.$$

Kadangi pastarosios išraiškos abu dėmenys dalijasi iš 3, tai ir skaičius $n^3 + 14n$ dalijasi iš 3.

Jeigu $r = 2$, tai $n = 3k + 2$ ir

$$n^3 + 14n = (3k+2)^3 + 14 \cdot (3k+2) = 3 \cdot (9k^3 + 18k^2 + 26k) + 36.$$

Pagal tą pačią dalumo savybę darome išvadą, kad skaičius $n^3 + 14n$ ir šiuo atveju dalijasi iš 3.

Taigi su visais natūraliaisiais n skaičius $n^3 + 14n$ dalijasi iš 3.

2 būdas. Įrodymas matematinės indukcijos metodu.

Pažymėkime $A(n) = n^3 + 14n$. Nesunku patikrinti, jog skaičius $A(n)$ dalijasi iš 3, jeigu $n = 1$:

$$A(1) = 1^3 + 14 \cdot 1 = 15.$$

Padarykime prielaidą, jog skaičius $A(k)$ dalijasi iš 3 ir įrodykime,

jog skaičius $A(k+1)$ dalijasi iš 3. Tuo įsitikinsime pertvarkę išraišką $A(k+1)$:

$$A(k+1)=(k+1)^3+14\cdot(k+1)=k^3+3k^2+3k+1+14k+14=$$
$$=k^3+14k+3k^2+3k+15=A(k)+3\cdot(k^2+k+5).$$

Taigi $A(k+1)$ dalijasi iš 3, nes pirmasis dėmuo dalijasi iš 3 (pagal prielaidą), o antrasis dėmuo yra $3\cdot(k^2+k+5)$.

Matematinės indukcijos principas leidžia tvirtinti, jog teiginys „n^3+14n dalijasi iš 3" yra teisingas su visais natūraliaisiais n.

Remdamiesi lyginių bei dalumo savybėmis įrodysime dalumo iš 3 ir 7 požymius.

Dalumo iš 3 požymio įrodymas. Tarkime, skaičius n yra toks:

$$n=\overline{a_k\cdot a_{k-1}\cdot\ldots\cdot a_2\cdot a_1\cdot a_0},\ k\geq 1;$$

čia a_0 yra vienetų skaitmuo, a_1 – dešimčių skaitmuo, a_2 – šimtų skaitmuo ir t. t.

Taigi $n=a_k\cdot 10^k+a_{k-1}\cdot 10^{k-1}+\ldots+a_2\cdot 10^2+a_1\cdot 10+a_0$.

Kadangi

$$10\equiv 1(\text{mod}3),\ 10^2\equiv 1(\text{mod}3),\ \ldots,\ 10^k\equiv 1(\text{mod}3),$$

tai pagal penktąją dalumo savybę gauname, jog

$$n\equiv a_k+a_{k-1}+\ldots+a_2+a_1+a_0(\text{mod}3).$$

Kitaip tariant, skaičius n ir jo skaitmenų suma dalijant iš 3 turi tą pačią liekaną. Jei skaitmenų suma dalijasi iš 3, tai ir pats skaičius n dalijasi iš 3.

Dalumo iš 7 požymio įrodymas. Duotąjį skaičių n užrašykime pavidalu $n=10a+b$, $0\leq b<10$ ir tarkime, kad šis skaičius dalijasi iš 7, t.y.

$$10a+b=7q,\ q\in\mathrm{N}.$$

Tada iš 7 dalijasi ir skaičius

$$a-2b=50a+5b-7(7a+b)=35q-7(7a+b).$$

Samprotaudami atvirkščia tvarka, iš skaičiaus $a-2b$ dalumo iš 7 galėtume išvesti ir skaičiaus $10a+b$ dalumą iš 7.

PIRMOJI UŽDUOTIS

1. Įrodykite šeštąją dalumo savybę: jei su skaičiais $a_1, a_2, ..., a_m$ ir $b_1, b_2, ..., b_n$ galioja lygybė

$$a_1 + a_2 + ... + a_m = b_1 + b_2 + ... + b_n$$

ir apie visus dėmenis, išskyrus vieną, žinoma, jog jie dalijasi iš a, tuomet ir šis dėmuo dalijasi iš a.

2. Raskite skaičių 3663 ir 1443 didžiausią bendrąjį daliklį.

3. Įrodykite, jog su visais natūraliaisiais n skaičius $n(n+1)(n+2)$ dalijasi iš 6. Ar šis teiginys galioja, kai n – bet kuris sveikasis skaičius? Atsakymą pagrįskite.

4. Įrodykite, jog su visais natūraliaisiais n skaičius $n^7 + 720n$ dalijasi iš 7.

5. Įrodykite, jog su bet kuriuo $a \in \mathrm{Z}$ ir bet kuriuo $n \in \mathrm{N}$ galioja teiginys:

$$(a^2 - a + 1) \mid (a^{2n+1} + (a-1)^{n+2}).$$

6. Ar skaičius $2^{15} + 3^{15}$ dalijasi iš 13? Atsakymą pagrįskite.

7. Raskite liekaną, gaunamą skaičių $13^{16} - 2^{25} \cdot 5^{15}$ dalijant iš 37.

8. Raskite liekaną, gaunamą skaičių $(116 + 17^{17})^{21}$ dalijant iš 8.

9. Raskite keturženklius skaičius $\overline{x97y}$, kurie dalijasi iš 45.

10. Raskite skaičiaus 2^{2000} paskutinįjį skaitmenį.



II. GRANDININĖS TRUPMENOS

Rimantas Skrabutėnas
(Vilniaus pedagoginis universitetas)

1. Formalų „daugiaaukštį" užrašą

$$[q_0, q_1, q_2, \dots, q_n, \dots] = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \dots}} \qquad (1)$$

vadinsime *grandinine trupmena* (GT). Skaičiai $q_0, q_1, \dots, q_n$ vadinami GT elementais.

Mes domėsimės tiktai tokiomis GT, kuriose q_i, $i \geq 1$ yra natūralieji skaičiai, o q_0 – sveikasis skaičius.

Akivaizdu, kad kai *natūraliųjų* elementų q_i skaičius yra baigtinis, tai GT yra *racionalusis skaičius*. Tokiu atveju GT vadinsime *baigtine grandinine trupmena* (sutrumpintai – BGT). Kai elementų seka q_i, $i = 0, 1, \dots$ yra begalinė, šitoks apibrėžimas ir išraiška (1) kol kas yra tik formalūs, nes neaiški tokio reiškinio prasmė: neaišku, nei kas pridedama prie q_i, nei iš ko kaskart dalijamas vienetas. Tad *begalinės* GT sąvoką patikslinsime kiek vėliau.

BGT aibė sutampa su racionaliųjų skaičių aibe Q. Tai išplaukia iš vadinamojo Euklido (arba kitaip: *nuoseklios dalybos*) algoritmo, kuris savo ruožtu pagrįstas *dalybos su liekana teorema*, tvirtinančia, kad *imant bet kokią sveikųjų skaičių* a *ir* $b \neq 0$ *porą, galima rasti tokią vienintelę sveikųjų skaičių* q *ir* r *porą, su kuria būtų teisinga lygybė:*

$$a = bq + r, \ 0 \leq r < |b|.$$

Sakome, kad skaičius a *padalytas iš skaičiaus* b *su liekana* r. Skaičius q vadinamas skaičių a ir b *dalybos nepilnuoju santykiu*. Pvz., jei $a = -13$, $b = 5$, tai $-13 = (-3) \cdot 5 + 2$, todėl nepilnasis santykis $q = -3$, o liekana $r = 2$.

Euklido algoritmu vadinamas nuoseklus dalybos su liekana teoremos taikymas: pirmiausia žinomų skaičių a ir b porai, po to skaičių b ir r (čia r yra a dalybos iš b liekana) porai, toliau skaičių r ir r_1 porai (r_1 yra b dalybos iš r liekana) ir t.t. Procesas tęsiamas tol, kol gaunama lygi nuliui liekana, sakykime $r_{k+1} = 0$. Gauname lygybes:

$$a = bq_0 + r,\ 0 \le r < |b|,$$
$$b = rq_1 + r_1,\ 0 \le r_1 < r,$$
$$r = r_1q_2 + r_2,\ 0 \le r_2 < r_1,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$r_{k-2} = r_{k-1}q_k + r_k,\ 0 \le r_k < r_{k-1},$$
$$r_{k-1} = r_kq_{k+1}.$$

Sakome, kad Euklido algoritmą pritaikėme skaičių a ir b porai. Iš šių nelygybių matome, kad liekanos $r, r_1, r_2, \dots$ nuosekliai mažėja. Kadangi jos yra neneigiami sveikieji skaičiai, tai būtinai po baigtinio žingsnių skaičiaus (ne didesnio už $|b|$) dalybos procesas baigsis. Pavyzdžiui, pritaikykime Euklido algoritmą skaičiams 705 ir 31:

$$705 = 22 \cdot 31 + 23,$$
$$31 = 1 \cdot 23 + 8,$$
$$23 = 2 \cdot 8 + 7,$$
$$8 = 1 \cdot 7 + 1$$
$$7 = 7 \cdot 1.$$

1 teorema. Kiekvienas racionalusis skaičius $t = \frac{a}{b}$ yra vienareikšmiškai išskleidžiamas BGT, kurios elementai yra nepilnieji santykiai, gauti taikant Euklido algoritmą skaičiams a ir b.

1 pavyzdys. Išskleiskime BGT racionalųjį skaičių 705/31. Anksčiau pateiktame pavyzdyje gauti nepilnieji santykiai $q_0 = 22$, $q_1 = 1$, $q_2 = 2$, $q_3 = 1$, $q_4 = 7$ ir yra ieškomo skleidinio elementai. Todėl $\frac{705}{31} = [22, 1, 2, 1, 7]$.

Ir atvirkščiai – jei duota baigtinė grandininė trupmena, tai atlikdami įprastus algebrinius pertvarkymus, lengvai paverčiame ją konkrečiu racionaliuoju skaičiumi.

2 pavyzdys.

$$[-2, 1, 2, 5] = -2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{5}}} = -2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{5}{11}} = -2 + \frac{11}{16} = -\frac{21}{16}.$$

2. Reduktai ir jų savybės.

Apibrėžimas. Nutraukus GT (baigtinę ar begalinę) ties jos k-tuoju elementu, gautąjį racionalųjį skaičių

$$R_k = [q_0, q_1, q_2, \ldots, q_k] =: \frac{P_k}{Q_k}$$

vadiname tos *GT k-tosios eilės* (arba: *k*-tuoju) *reduktu.*

Reduktų skaitikliai P_k ir vardikliai Q_k turi daug įdomių savybių, įgalinančių efektyviai taikyti GT .

1. GT *k*-tojo redukto skaitikliai ir vardikliai tenkina rekurenčiąsias formules:

$$P_k = q_k P_{k-1} + P_{k-2}, \quad Q_k = q_k Q_{k-1} + Q_{k-2}.$$

Papildomai apibrėžus $P_{-1} = 1$ ir $Q_{-1} = 0$, šios rekurenčiosios formulės galioja su visais $k \geq 1$.

2. Su visais natūraliaisiais *k*:

$$P_{k-1}Q_k - P_k Q_{k-1} = (-1)^k.$$

3. GT reduktai yra nesuprastinamos trupmenos, kitaip tariant, su visais natūraliaisiais *k* skaičių P_k ir Q_k didžiausias bendras daliklis yra lygus 1 $(D(P_k, Q_k) = 1)$.

4. Pažymėkime (R_{2k}) reduktų su lyginiais numeriais seką $R_2, R_4, R_6, \ldots$, o (R_{2k+1}) – reduktų su nelyginiais numeriais seką $R_1, R_3, R_5, \ldots$. Seka (R_{2k}) yra didėjanti, o (R_{2k+1}) – mažėjanti. Baigtinėje grandininėje trupmenoje paskutinis reduktas (lyginis arba nelyginis) sutampa su išskleistuoju racionaliuoju skaičiumi.

5. Su visais *k* galioja nelygybės $R_{2k} < R_{2k+1}$ ir $R_{2k} < R_{2k-1}$.

6. Su visais *k* ir *l* turime $R_{2k} < R_{2l+1}$.

7. Jeigu t baigtinė GT, o R_k – jos reduktai, tai su visais $k \leq n-1$

$$|\, t - R_k| \leq |R_{k+1} - R_k| = \frac{1}{Q_k Q_{k+1}} \leq \frac{1}{Q_k^2}.$$

Baigtinės ar begalinės GT reduktus patogu apskaičiuoti sudarant lentelę, kurioje reduktų skaitikliai ir vardikliai randami remiantis rekurenčiosiomis formulėmis.

3 pavyzdys. Rasime visus mūsų išskleisto skaičiaus $\frac{705}{31} = [22, 1, 2, 1, 7]$ reduktus. Sudarome tokią lentelę:

k	-1	0	1	2	3	4
q_k		**22**	**1**	**2**	**1**	**7**
P_k	1	22	23	68	91	705
Q_k	0	1	1	3	4	31

Todėl $R_0 = \frac{22}{1}$, $R_1 = \frac{23}{1}$, $R_2 = \frac{68}{3}$, $R_3 = \frac{91}{4}$, $R_4 = \frac{705}{31}$. Šiuo atveju pats skaičius sutampa su lyginės eilės reduktu R_4. Jei turime racionaliojo skaičiaus skleidinį, o norime žinoti patį skaičių, tai paskutinis šitaip apskaičiuotas reduktas ir bus atsakymas. Be to, pagal trečią reduktų savybę, atsakymą gausime nesuprastinamos trupmenos pavidalu.

4 pavyzdys. Skaičiui $\beta = [3, 7, 15, 1, 292]$ gausime:

k	-1	0	1	2	3	4
q_k		3	7	15	1	292
P_k	1	3	22	333	355	103993
Q_k	0	1	7	106	113	33102

Todėl $\beta = R_4 = \frac{103993}{33102}$ ir $D(103993, 33102) = 1$.

3. Begalinės GT. Kai užraše (1), elementų seka (q_k) yra begalinė, tai galime kalbėti, apie *reduktų sekos* (R_k) *ribą. Ta riba* α (jeigu ji egzistuoja) *vadinama* GT (1) *reikšme ir rašoma*

$$\alpha = [q_0, q_1, q_2, \dots, q_k, \dots] = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \dots}}.$$

Pasirodo, kad yra teisinga tokia teorema.

2 teorema. Begalinės GT reduktų seka (R_k) visada turi ribą.

Svarbu yra tai, kad baigtine ar begaline GT galima užrašyti *bet kokį realųjį* skaičių.

3 teorema. Bet kokį realųjį skaičių α galima vienareikšmiškai išskleisti GT. Ta GT yra baigtinė, kai α yra racionalusis ir begalinė, kai α iracionalusis skaičius.

Racionalųjį skaičių $[q_0, q_1, q_2,..., q_k]$ žymėsime R_k ir, kaip jau sakyta, vadinsime grandininės trupmenos $[q_0, q_1, q_2,..., q_k, ...]$ k–tuoju reduktu. Įvestųjų sąvokų prasmė paaiškėja pastebėjus, kad GT reikšmė sutampa su pačiu skaičiumi α.

4 teorema. Sekos (R_k) riba yra būtent išskleistasis skaičius α.

Realiojo skaičiaus α skleidinio GT reduktus įprasta vadinti tiesiog *skaičiaus* α *reduktais*. Jiems yra teisingos visos minėtos reduktų savybės. Ypač svarbi taikymuose yra septintoji savybė:

$$|\alpha - R_k| \le \frac{1}{Q_k Q_{k+1}} \le \frac{1}{Q_k^2} .$$

Verta žinoti, kad iracionaliojo skaičiaus α *lyginės eilės reduktai yra mažesni, o nelyginės eilės – didesni už* α.

Grandininės trupmenos taikomos aproksimacijoms, t.y. realiojo skaičiaus įvertinimo racionaliaisiais skaičiais uždaviniuose. GT taip pat naudojamos sprendžiant lyginius bei diofantines lygtis (pavadintas graikų matematiko Diofanto iš Aleksandrijos, gyvenusio II–III amžiuje, vardu). Diofantinėmis lygtimis vadinamos lygtys su keliais nežinomaisiais, kai ieškoma sveikųjų sprendinių. Pavyzdžiui, paprasčiausios diofantinės lygties

$$ax + by = c$$

su sveikaisiais koeficientais a, b, c bendrasis sprendinys, kai $D(a,b) = 1$, apskaičiuojamas pagal formules:

$$x = (-1)^{n-1} c Q_{n-1} + bt ; \qquad y = (-1)^n c P_{n-1} - at .$$

Čia $R_{n-1} = \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$ yra skaičiaus $\frac{a}{b}$ skleidinio BGT priešpaskutinis reduktas, o $t \in Z$.

5 pavyzdys. Neapibrėžtosios lygties $705x + 31y = 3$ *bendrasis sprendinys* yra aibė, sudaryta iš sveikųjų skaičių porų

$$\left((-1)^{4-1} \cdot 3 \cdot 4 + 31t,\ (-1)^4 3 \cdot 91 - 705t\right) =$$
$$= (-12 + 31t,\ 273 - 705t),\quad t \in Z,$$

kadangi $c = 3$, o 3 pavyzdyje jau esame radę, kad šiuo atveju $n = 4$, $R_3 = \frac{91}{4}$.

4. Periodinės GT. Daugumai realiųjų skaičių skleidimas grandininėmis trupmenomis nėra paprastas uždavinys. Yra gauti tik atskirų iracionaliųjų skaičių, ar skaičių tipų skleidiniai. Pvz., apskaičiuota per 200 000 skaičiaus π skleidinio GT elementų. 4 pavyzdžio skaičius $\beta = [3, 7, 15, 1, 292]$ kaip tik ir pateikia pirmuosius penkis π skleidinio elementus. Kadangi $q_4 = 292$ yra gana didelis skaičius, tai iš 7-tosios reduktų savybės išplaukia, kad jau $R_2 = \frac{333}{106}$ (ypač $R_3 = \frac{355}{113}$) yra labai tikslūs skaičiaus π artiniai.

Kaip matėme, skleidžiant GT didesnių problemų nekelia tik racionalieji skaičiai. Yra dar viena, gana siaura iracionaliųjų skaičių klasė, – *kvadratinės iracionalybės*, kurių skleidinys vadinamosiomis *periodinėmis* GT gaunamas palyginti paprastai.

Apibrėžimas. Begalinė GT $\alpha = [q_0, q_1, q_2, \ldots, q_n, \ldots]$ vadinama *periodine*, jei egzistuoja tokie natūralieji skaičiai m ir h, kad su bet kuriuo $k \geq m$ galioja lygybė $q_{k+h} = q_k$.

Mažiausiąjį iš tokių natūraliųjų skaičių h įprasta vadinti GT *periodo ilgiu*.

Sutrumpintai rašome

$$\alpha = [q_0, q_1, q_2, \ldots, q_{m-1}, \overline{q_m, \ldots, q_{m+h-1}}].$$

Galima kalbėti apie *grynai periodines* ir *mišrias periodines* begalines GT: jei $m = 0$, tai GT vadinama *grynai periodine*.

Apibrėžimas. Realųjį, bet neracionalųjį kvadratinės lygties $ax^2 + bx + c = 0$ su sveikaisiais koeficientais a, b, c sprendinį α vadinsime *kvadratine iracionalybe*.

6 pavyzdys. Skaičiai $\sqrt{7}$ ir $1+\sqrt{3}$ yra kvadratinės iracionalybės, nes yra, atitinkamai, kvadratinių lygčių $x^2 - 7 = 0$ ir $x^2 - 2x - 2 = 0$ sprendiniai.

7 pavyzdys. Pademonstruosime realiojo skaičiaus skleidimo GT algoritmą (juo, beje, remiasi ir 3 teoremos įrodymas) skleisdami *kvadratinę iracionalybę* $\sqrt{2}$. Kadangi kiekvienas realusis skaičius x

vienareikšmiškai užrašomas savo *sveikosios* ir *trupmeninės* dalių suma ($x = [x] + \{x\},\ 0 \le \{x\} < 1$), tai tuo vadovaudamiesi nuosekliai gauname:

$$\sqrt{2} = [\sqrt{2}] + \{\sqrt{2}\} = 1 + (\sqrt{2} - 1) = 1 + \cfrac{1}{\cfrac{1}{\sqrt{2} - 1}}.$$

Toliau: $$\frac{1}{\sqrt{2} - 1} = \sqrt{2} + 1 = 2 + (\sqrt{2} - 1) = 2 + \cfrac{1}{\cfrac{1}{\sqrt{2} - 1}} = \ldots$$

ir procesas ima kartotis. Tad: $\sqrt{2} = [1, 2, 2, 2, \ldots] = [1, \overline{2}]$. Šiuo atveju $m = h = 1$.

Apskaičiavę $R_1 = \frac{3}{2}$, $R_2 = \frac{7}{5}$, $R_3 = \frac{17}{12}$, $R_4 = \frac{41}{27}$ pastebime, kad jau R_3 yra gana tikslus skaičiaus $\sqrt{2}$ artinys, nes pagal reduktų septintąją savybę: $\left|\sqrt{2} - \frac{17}{12}\right| < \frac{1}{12 \cdot 27} < 0{,}0031$.

Pasirodo, kad šitoks $\sqrt{2}$ skleidimo rezultatas nėra atsitiktinumas. Dar 1770 m. Ž. Lagranžas įrodė, kad periodinių begalinių GT aibė sutampa su kvadratinių iracionalybių aibe.

6 teorema (Lagranžo). Kiekvienos periodinės GT reikšmė yra lygi kvadratinei iracionalybei. Ir atvirkščiai: kiekviena kvadratinė iracionalybė išskleidžiama periodine (grynąja ar mišriąja) GT.

Jeigu norime pagal turimą skaičiaus α skleidinį *grynai periodine* GT $\alpha = [q_0, q_1, q_2, \ldots, q_{h-1}, q_0, q_1, \ldots, q_{h-1}, \ldots]$ surasti kvadratinę irracionalybę, kurią tas skleidinys išreiškia, tai patogiausia tai daryti naudojantis formule

$$\alpha = \frac{\alpha P_{h-1} + P_{h-2}}{\alpha Q_{h-1} + Q_{h-2}}; \qquad (2)$$

čia h yra periodo ilgis.

Ši formulė išplaukia iš formalios išraiškos, kuri, grynai periodinės GT atveju atrodo taip: $\alpha = [q_0, q_1, q_2, \ldots, q_{h-1}, \alpha]$. Pertvarkius (2) formulę, gaunama kvadratinė lygtis α atžvilgiu:

$$Q_{h-1}\alpha^2 + (Q_{h-2} - P_{h-1})\alpha - P_{h-2} = 0. \qquad (3)$$

Kai turime skleidinį *mišria periodine* GT su ilgio *m priešperiodžiu* $\alpha=[q_0,q_1,q_2,...,q_{m-1},q_m,q_{m+1},...,q_{m+h-1},q_m,...,q_{m+h-1},...]$ tai patogiausia pradžioje iš (3) formulės rasti kvadratinę irracionalybę α_m, išreiškiančią *atitinkamą grynai periodinę* GT, o tada jau skaičių α apskaičiuoti iš išraiškos:

$$\alpha=\frac{\alpha_m P_{m-1}+P_{m-2}}{\alpha_m Q_{m-1}+Q_{m-2}}. \qquad (4)$$

8 pavyzdys. Kai $\alpha=[1,2,\overline{1,1,3}]$, tai $m=2$, $h=3$. Tada sudarome lentelę atitinkamai grynai periodinei trupmenai $\alpha_2=[1,1,3,1,1,3,...]$ apskaičiuoti:

k	-1	0	1	2
q_k		**1**	**1**	**3**
P_k	1	1	2	7
Q_k	0	1	1	4

Įrašę gautuosius skaičius į (2) formulę, gauname:

$$\frac{7\alpha_2+2}{4\alpha_2+1}=\alpha_2, \text{ arba } 2\alpha_2^2-3\alpha_2-1=0.$$

Iš čia $\alpha_2=\frac{3+\sqrt{17}}{4}$. Dabar apskaičiuojame α. Tuo tikslu vėl sudarome lentelę tik dabar jau pagal *priešperiodžio* elementus:

k	-1	0	1
q_k		**1**	**2**
P_k	1	1	3
Q_k	0	1	2

Pagal (4) formulę gauname atsakymą:

$$\alpha=[1,2,\overline{1,1,3}]=\frac{\alpha_2\cdot 3+1}{\alpha_2\cdot 2+1}=\frac{13+3\sqrt{17}}{10+2\sqrt{17}}=\frac{7+\sqrt{17}}{4}.$$

ANTROJI UŽDUOTIS

1. Taikydami Euklido algoritmą, išskleiskite skaičių $-\dfrac{3523}{1300}$ baigtine grandinine trupmena (BGT).

2. Apskaičiavę reduktus, raskite racionalųjį skaičių r, išreikštą BGT, jei $r = [-7, 2, 1, 4, 6, 1, 3]$.

3. Skaičių $-3\dfrac{41}{119}$ išskleidę BGT, raskite jo visų eilių reduktus. Patikrinkite lygybę $P_{k-1}Q_k - P_kQ_{k-1} = (-1)^k$, kai $k = 3$.

4. Suprastinkite racionalųjį skaičių $\dfrac{11929}{12877}$ skleisdami jį BGT. Raskite jo visų eilių reduktus ir išdėstykite juos *didėjimo* tvarka.

5. Pakeiskite trupmeną $-\dfrac{437}{702}$ tokiu jos reduktu su mažiausiu vardikliu, kad padaryta paklaida neviršytų 0,002.

6. Panaudodami grandinines trupmenas, išspręskite diofantinę lygtį $12x + 31y = 436$. Raskite jos *atskirąjį* sprendinį (x_0, y_0), jei žinoma, kad x_0 reiškia žmogaus gimimo dieną, o y_0 – gimimo mėnesį.

7. Skaičių $\sqrt{23}$ išskleiskite GT. Raskite tokį jo reduktą R_k su mažiausiu vardikliu, kad galiotų įvertis

$$\left|\sqrt{23} - R_k\right| \le 0{,}001 .$$

8. Skleisdami GT, raskite kvadratinės lygties $x^2 - 5x + 3 = 0$ mažesniosios šaknies racionalųjį artinį 0,002 tikslumu.

9. Raskite kvadratinę irracionalybę α, jei žinoma, kad
$\alpha = [-3, 2, 1, 4, 1, 4, 1, 4, \ldots] = [-3, 2, \overline{1, 4}]$.

10. Įrodykite, kad su visais natūraliaisiais skaičiais n

$$\sqrt{n^2 + 2} = [n, n, 2n, n, 2n, n, 2n, n, \ldots] = [n, \overline{n, 2n}].$$



III. VIDURKIAI

Vladas Vitkus
(Vilniaus „Minties“ gimnazija)

Apibrėžimai:

1. Neneigiamų realiųjų skaičių $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ *aritmetiniu vidurkiu* vadinamas skaičius $A = \dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$.

2. Neneigiamų realiųjų skaičių $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ *geometriniu vidurkiu* vadinamas skaičius $G = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_n}$.

3. Teigiamų realiųjų skaičių $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ *harmoniniu vidurkiu* vadinamas skaičius $H = \dfrac{n}{\dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} + \dfrac{1}{a_3} + \ldots + \dfrac{1}{a_n}}$.

4. Neneigiamų realiųjų skaičių $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ *kvadratiniu vidurkiu* vadinamas skaičius $K = \sqrt{\dfrac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \ldots + a_n^2}{n}}$.

1 pavyzdys. Apskaičiuokime ir palyginkime keturių teigiamų skaičių 1; 2; 2; 4 vidurkius A, G, H, K.

Sprendimas.

$$A = \frac{1+2+2+4}{4} = \frac{9}{4} = 2{,}25\,; \quad G = \sqrt[4]{1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 4} = \sqrt[4]{2^4} = 2\,;$$

$$H = \frac{4}{\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}} = \frac{4}{\frac{9}{4}} = \frac{16}{9} = 1\frac{7}{9}\,;$$

$$K = \sqrt{\frac{1^2 + 2^2 + 2^2 + 4^2}{4}} = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2} = 2{,}5\,.$$

Gavome $1\frac{7}{9} < 2 < 2{,}25 < 2{,}5$, t.y. $H < G < A < K$.

Jeigu visi keturi skaičiai būtų lygūs, tai ir visi vidurkiai būtų lygūs.

Galima įrodyti, kad bet kurių teigiamų realiųjų skaičių vidurkiams galioja tokios nelygybės: $H \le G \le A \le K$.

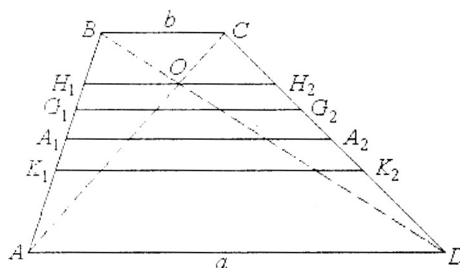
Tada dviejų teigiamų skaičių a ir b vidurkiams galioja tokios nelygybės:

$$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \le \sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2} \le \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

Šias nelygybes galima pavaizduoti geometriškai.

Turime trapeciją $ABCD$, kurios pagrindai $AD = a$, $BC = b$; O – įstrižainių susikirtimo taškas. Tada

1) harmoninis vidurkis $\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$ lygus ilgiui atkarpos H_1H_2, kuri lygiagreti su trapecijos pagrindais ir eina per tašką O;



1 pav.

2) geometrinis vidurkis $\sqrt{ab}$ lygus ilgiui atkarpos G_1G_2, kuri yra lygiagreti su trapecijos pagrindais ir duotąją trapeciją dalija į dvi panašias trapecijas BCG_2G_1 bei G_1G_2DA;

3) aritmetinis vidurkis $\frac{a+b}{2}$ lygus trapecijos vidurinei linijai A_1A_2;

4) kvadratinis vidurkis $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ lygus ilgiui atkarpos K_1K_2, kuri yra lygiagreti su pagrindais ir trapeciją $ABCD$ dalija į dvi lygiaplotes trapecijas.

Kadangi $H_1H_2 < G_1G_2 < A_1A_2 < K_1K_2$, tai

$$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} < \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2} < \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

Visos nelygybės yra griežtos, nes trapecijos pagrindai yra nelygūs.

Vidurinės mokyklos matematikos kurse dažniausiai taikomas aritmetinis ir geometrinis vidurkiai.

Teorema (Koši nelygybė). Kai $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ – bet kurie neneigiami skaičiai, tai

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_n}.$$

Dėl sunkumo šios teoremos įrodymo nepateikiame, bet panagrinėsime atskirus jos atvejus, imdami pavyzdžius su dviem, keturiais, o užduotis – trimis, aštuoniais skaičiais.

2 pavyzdys. Įrodykime, kad dviejų neneigiamų skaičių aritmetinis vidurkis ne mažesnis už jų geometrinį vidurkį, t.y. $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$, kai $a \geq 0$ ir $b \geq 0$. Nustatykime, kada galimas lygybės ženklas.

Įrodymas. Imame skirtumą:

$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2} = \frac{\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2}{2} \geq 0.$$

Vadinasi,

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}. \qquad (1)$$

Iš įrodymo matyti, kad nelygybėje $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ lygybės ženklas galimas tada ir tik tada, kai jis galimas nelygybėje $\frac{\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2}{2} \geq 0$, t.y., kai $\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2 = 0$. O taip bus, kai $a = b$.

Kaip išvados iš (1) nelygybės kartais naudingos ir tokios nelygybės:

$$a + b \geq 2\sqrt{ab}, \qquad (2)$$

$$a^2 + b^2 \geq 2ab, \qquad (3)$$

$$ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2, \qquad (4)$$

$$ab \leq \frac{1}{2}\left(a^2 + b^2\right). \qquad (5)$$

3 pavyzdys. Įrodykime, kad keturių neneigiamų skaičių aritmetinis vidurkis ne mažesnis už jų geometrinį vidurkį, t. y.

$\frac{a+b+c+d}{4} \geq \sqrt[4]{abcd}$. Nustatykime, kada galimas lygybės ženklas.

Įrodymas. Kadangi $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ ir $\frac{c+d}{2} \geq \sqrt{cd}$, tai

$$\frac{a+b+c+d}{4} = \frac{\frac{a+b}{2} + \frac{c+d}{2}}{2} \geq \frac{\sqrt{ab} + \sqrt{cd}}{2}.$$

Skaičių $\sqrt{ab}$ ir $\sqrt{cd}$ aritmetinis vidurkis ne mažesnis už jų geometrinį vidurkį: $\frac{\sqrt{ab} + \sqrt{cd}}{2} \geq \sqrt{\sqrt{ab} \cdot \sqrt{cd}} = \sqrt[4]{abcd}$.

Vadinasi, $\frac{a+b+c+d}{4} \geq \sqrt[4]{abcd}$.

Jei teisingas bent vienas sąryšis $a \neq b$, $c \neq d$, $ab \neq cd$, tai nelygybė yra griežta. Lygybė galima tik tada, kai $a = b$, $c = d$, $ab = cd$. Iš čia $a^2 = c^2$; $a = c$. Taigi lygybė galima tada ir tik tada, kai $a = b = c = d$.

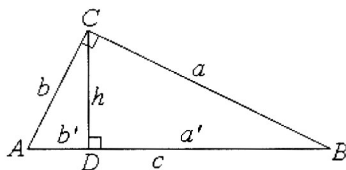
Su dviejų skaičių aritmetiniu ir geometriniu vidurkiais susiduriame ir mokydamiesi geometrijos. Jau žinome, kad trapecijos vidurinė linija yra jos pagrindų aritmetinis vidurkis.

4 pavyzdys. Stačiajame trikampyje aukštinė, nuleista į įžambinę, yra geometrinis vidurkis statinių projekcijų įžambinėje, o kiekvienas statinis yra geometrinis vidurkis visos įžambinės ir to statinio projekcijos įžambinėje.

$h = \sqrt{a'b'}$;

$a = \sqrt{ca'}$;

$b = \sqrt{cb'}$.



2 pav.

Įrodykime lygybę $h = \sqrt{a'b'}$.

Statieji trikampiai ADC ir BDC yra panašūs, nes $\angle A = \angle BCD = 90^\circ - \angle B$. Iš šių trikampių panašumo:

$$\frac{a'}{h} = \frac{h}{b'};\ h^2 = a'b';\ h = \sqrt{a'b'}.$$

(1)–(5) nelygybės kartais sėkmingai gali būti panaudojamos ieškant

didžiausios (mažiausios) reiškinio reikšmės arba įrodant kitas nelygybes.

5 pavyzdys. Raskime didžiausią dviejų teigiamų kintamųjų sandaugos reikšmę, jeigu jų suma yra pastovi.

Sprendimas. Tegu a ir b – du teigiamas reikšmes įgyjantys kintamieji, be to, $a+b=C$, čia C – pastovus skaičius. Kai $a \neq b$, pagal (4) nelygybę $ab<\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$, t.y. $ab<\left(\frac{C}{2}\right)^2$. Kai $a=b$, turime $ab=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$, t.y. $ab=\left(\frac{C}{2}\right)^2$. Vadinasi, kai kintamieji a ir b yra lygūs, sandauga įgyja didžiausią reikšmę, lygią $\left(\frac{C}{2}\right)^2$.

6 pavyzdys. Įrodykime nelygybę

$$a+b+c \geq \sqrt{ab}+\sqrt{ac}+\sqrt{bc} \quad (a \geq 0,\ b \geq 0,\ c \geq 0).$$

Sprendimas. Pasinaudoję (1) nelygybe, gauname:

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}\,;\ \frac{a+c}{2} \geq \sqrt{ac}\,;\ \frac{b+c}{2} \geq \sqrt{bc}\,.$$

Šias tris nelygybes panariui sudėję turėsime:

$$a+b+c \geq \sqrt{ab}+\sqrt{ac}+\sqrt{bc}\,.$$

Sprendžiant lygtis, kartais naudinga nauju kintamuoju pažymėti į lygtį įeinančių reiškinių aritmetinį vidurkį.

7 pavyzdys. Išspręskime lygtį $x(x+1)(x+2)(x+3)=24$.

Sprendimas. Įvedame naują kintamąjį y:

$$y=\frac{x+(x+1)+(x+2)+(x+3)}{4}=x+1{,}5\,.$$

Tada $x(x+1)(x+2)(x+3)=$

$=(y-1{,}5)(y-0{,}5)(y+0{,}5)(y+1{,}5)=(y^2-0{,}25)(y^2-2{,}25).$

Sprendžiame lygtį $y^4-2{,}5y^2+0{,}5625=24$.

Pažymėję $y^2=z$ $(z \geq 0)$, gauname

$z^2-2{,}5z-23{,}4375=0$; $z=6{,}25$ arba $z=-3{,}75$ (netinka);

$y^2=6{,}25$; $y=\pm 2{,}5$; $x=y-1{,}5$; $x_1=-4$, $x_2=1$.

Ats.: -4; 1.

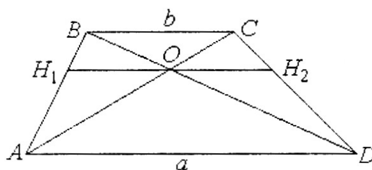
Harmoninis vidurkis praverčia skaičiuojant vidutinį greitį. Sakykime, kad automobilio greitis važiuojant iš A į B yra v_1 km/h, o grįžtant iš B į A – v_2 km/h. Tada vidutinis automobilio greitis v visame kelyje yra skaičių v_1 ir v_2 harmoninis vidurkis, t.y. $v = \dfrac{2}{\dfrac{1}{v_1} + \dfrac{1}{v_2}}$.

Patikrinkite, ar tikrai taip yra. Formulė atrodytų panašiai, jeigu vienodo ilgio kelionės atstumų, įveikiamų skirtingais greičiais, būtų ir daugiau negu du.

TREČIOJI UŽDUOTIS

1. Įrodykite 4 pavyzdyje pateiktas lygybes $a = \sqrt{ca'}$, $b = \sqrt{cb'}$. Pasinaudodami šiomis lygybėmis išveskite Pitagoro teoremos formulę.

2. Duota trapecija $ABCD$. Per jos įstrižainių susikirtimo tašką O nubrėžta atkarpa H_1H_2, lygiagreti su trapecijos pagrindais. Įrodykite, kad harmoninis vidurkis $\dfrac{2}{\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}}$ yra lygus atkarpos H_1H_2 ilgiui. Čia a ir b trapecijos pagrindų ilgiai.



3 pav.

3. Raskite mažiausią dviejų teigiamų kintamųjų sumą, jeigu jų sandauga yra pastovi.

4. Iš granito reikia iškirsti stačiakampio gretasienio formos postamentą, kurio aukštis lygus pagrindo įstrižainei, o pagrindo plotas – 4 m^2. Koks turi būti pagrindo ilgis ir plotis, kad postamento visas paviršius būtų mažiausias?

5. Išspręskite lygtį $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) = 120$.

6. Pirmąjį viso kelio trečdalį automobilis nuvažiavo 54 km/h greičiu, antrąjį – 45 km/h greičiu, o trečiąjį – 60 km/h greičiu. Raskite vidutinį automobilio greitį. (Atsakymą pateikite 0,1 km/h tikslumu.)

7. Įrodykite 1 pavyzdyje pateiktą nelygybę $\frac{a+b}{2} \le \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$, kai $a \ge 0$, $b \ge 0$.

8. Įrodykite, kad trijų neneigiamų skaičių aritmetinis vidurkis ne mažesnis už jų geometrinį vidurkį, t.y. $\frac{a+b+c}{3} \ge \sqrt[3]{abc}$. Kada galioja lygybė? (Pasinaudokite 3 pavyzdyje įrodyta nelygybe ir imkite $d = \frac{a+b+c}{3}$.)

9. Įrodykite, kad bet kurių aštuonių neneigiamų skaičių b_1, b_2, b_3, ..., b_7, b_8 aritmetinis vidurkis nemažesnis už jų geometrinį vidurkį.

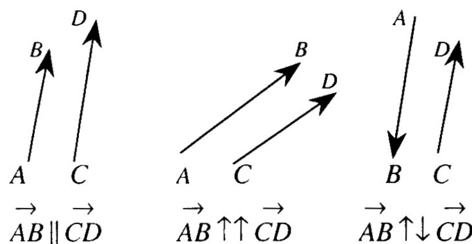
10. Įrodykite nelygybę $a^4 + b^4 + c^4 \ge abc(a+b+c)$.



IV. VEKTORIAI

Edmundas Mazėtis
(Vilniaus pedagoginis universitetas)

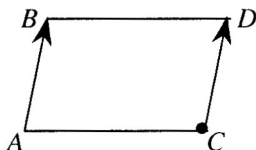
1. Priminsime kai kuriuos teiginius, žinomus iš mokyklinės geometrijos kurso. *Vektoriumi* $\vec{a} = \vec{AB}$ (arba kryptine atkarpa) vadinama atkarpa AB, kurioje yra nurodyti fiksuoti jos pradžios ir galo taškai. Du vektoriai $\vec{AB}$ ir $\vec{CD}$ yra vadinami a) *kolineariais* ($\vec{AB} \parallel \vec{CD}$), jei tiesės AB ir CD yra lygiagrečios; b) *vienakrypčiais* ($\vec{AB} \uparrow\uparrow \vec{CD}$), jei spinduliai AB ir CD yra vienodos krypties ir c) *priešpriešiais* ($\vec{AB} \uparrow\downarrow \vec{CD}$), jei spinduliai AB ir CD yra priešingų krypčių (1 pav.).



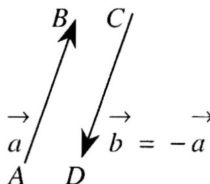
1 pav.

Vektorius, kurio pradžios ir galo taškai sutampa, yra vadinamas *nuliniu vektoriumi* $\vec{0}$. Nulinis vektorius yra kolinearus bet kuriam vektoriui. *Vektoriaus* $\vec{a} = \vec{AB}$ *moduliu* $|\vec{a}| = |\vec{AB}|$ vadinamas atkarpos AB ilgis, nulinio vektoriaus modulis lygus nuliui.

Vienakrypčiai vektoriai $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ vadinami *lygiais*, jei jų moduliai lygūs. Iš šio apibrėžimo išplaukia, kad vektoriai $\vec{AB}$ ir $\vec{CD}$, nepriklausantys vienai tiesei, yra lygūs tada ir tik tada, kai keturkampis $ABCD$ yra lygiagretainis (2 pav.).

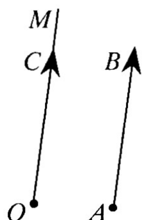


2 pav.



3 pav.

Priešpriešiai vektoriai $\vec{a}$ ir $\vec{b}$, kurių moduliai lygūs, vadinami *priešingaisiais* vektoriais. Kiekvienam vektoriui $\vec{a}$ egzistuoja priešingas vektorius, kuris žymimas $-\vec{a}$ (3 pav.).

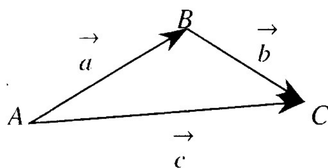


4 pav.

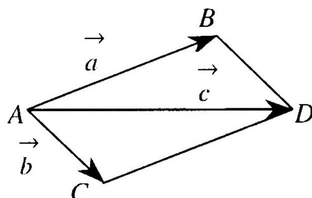
Sakykime, kad O – bet koks plokštumos taškas, $\vec{a} = \vec{AB}$ – koks nors tos plokštumos vektorius. Nubrėžkime spindulį OM, vienakryptį spinduliui AB ir jame raskime vienintelį tašką C, kad atkarpos AB ir OC būtų lygios (4 pav.). Tuomet vektoriai $\vec{AB}$ ir $\vec{OC}$ yra lygūs. Sakome, kad *vektorius* $\vec{a}$ *yra atidėtas nuo taško* O. Jei du vektoriai $\vec{a} = \vec{OA}$ ir $\vec{b} = \vec{OB}$ atidėti nuo vieno taško O, tai kampas AOB yra vadinamas *kampu tarp vektorių* $\vec{a}$ ir $\vec{b}$. Jei $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$, tai kampas tarp vektorių $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ lygus 0, o jei $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$ – tai 180°.

2. Sakykime, kad turime du vektorius $\vec{a}$ ir $\vec{b}$. Atidėkime nuo taško A vektorių $\vec{AB} = \vec{a}$, o nuo taško B – vektorių $\vec{BC} = \vec{b}$. Tuomet vektorius $\vec{c} = \vec{AC}$ yra vadinamas *vektorių* $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ *suma*: $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ arba $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC}$ (vektorių sudėties trikampio taisyklė; 5 pav.). Jei vektoriai $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ nekolinearūs, tai atidėję nuo taško A vektorius

$\vec{AB} = \vec{a}$ ir $\vec{AC} = \vec{b}$, nubrėžiame lygiagretainį $ABDC$ (6 pav.) Tuomet $\vec{AD} = \vec{AB} + \vec{AC}$ (vektorių sudėties lygiagretainio taisyklė).



5 pav.



6 pav.

Vektorių sudėtis pasižymi šiomis savybėmis:

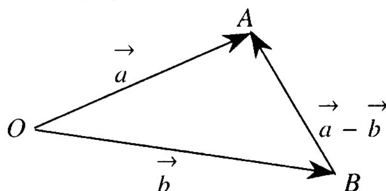
1) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$,

2) $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$,

3) $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$,

4) $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$.

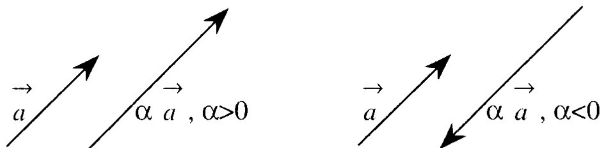
Vektorių $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ *skirtumu* $\vec{a} - \vec{b}$ yra vadinamas vektorius, lygus vektoriaus $\vec{a}$ ir vektoriaus $-\vec{b}$, priešingo vektoriui $\vec{b}$, sumai: $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$. Jei $\vec{a} = \vec{OA}$, $\vec{b} = \vec{OB}$ atidėti nuo vieno taško O, tai $\vec{a} - \vec{b} = \vec{OA} - \vec{OB} = \vec{BA}$ (7 pav.).



7 pav.

Skaičiaus α ir vektoriaus $\vec{a}$ ir sandauga vadinamas vektorius $\vec{b}$,

pasižymintis savybėmis: 1) $\vec{b} \uparrow\uparrow \vec{a}$, jei $\alpha > 0$, $\vec{b} \uparrow\downarrow \vec{a}$, jei $\alpha < 0$. 2) $|\vec{b}| = |\alpha| \cdot |\vec{a}|$ (8 pav.).



8 pav.

Skaičiaus 0 ir vektoriaus $\vec{a}$ sandauga laikysime nulinį vektorių $\vec{0}$.

Skaičiaus α ir vektoriaus $\vec{a}$ sandaugą žymėsime taip: $\alpha \cdot \vec{a}$. Taigi $\vec{b} = \alpha \cdot \vec{a}$

Vektoriaus daugyba iš skaičiaus pasižymi šiomis savybėmis:

1) $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$, 2) $(\alpha\beta)\vec{a} = \alpha(\beta\vec{a})$,

3) $(\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$, 4) $\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$.

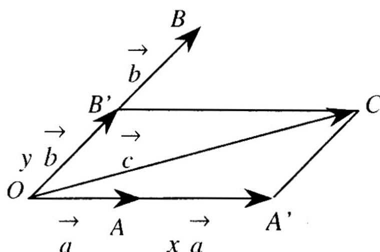
Vektoriai $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ yra kolinearūs tada ir tik tada, kai yra toks skaičius α, kad $\vec{b} = \alpha\vec{a}$. Jei $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$, tai $\alpha = \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$, jei $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$, tai $\alpha = -\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$.

1 teorema. Sakykime, kad $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ – du nekolinearūs plokštumos vektoriai. Tuomet bet kurį plokštumos vektorių $\vec{c}$ vieninteliu būdu galime išreikšti vektoriais $\vec{a}$ ir $\vec{b}$, t. y., rasti tokius skaičius x ir y, kad būtų teisinga lygybė

$$\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}. \quad (1)$$

Įrodymas. Tegu $\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{OB} = \vec{b}$, $\vec{OC} = \vec{c}$ (9 pav.). Per tašką C brėžiame tiesę CB', lygiagrečią tiesei, kurioje yra vektorius $\vec{a}$, ir tiesę

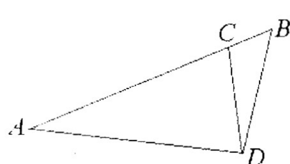
CA', lygiagrečią tiesei, kurioje yra vektorius $\vec{b}$. Pagal vektorių sudėties taisyklę $\vec{OC} = \vec{OA'} + \vec{OB'}$. Kadangi $\vec{OA'} = x\vec{a}$, o $\vec{OB'} = y\vec{b}$, tai $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$.



9 pav.

2 teorema. Sakykime, kad atkarpoje AB yra taškas C, dalijantis atkarpą AB santykiu $AC : CB = = \alpha : \beta$. Tuomet bet kuriam plokštumos taškui O yra teisinga lygybė $\vec{OC} = \dfrac{\alpha\vec{OB} + \beta\vec{OA}}{\alpha + \beta}$

Įrodymas. Sakykime, kad $AC : CB = = \alpha : \beta$ (10 pav.), t. y., $\vec{AC} = = \dfrac{\alpha}{\beta}\vec{CB}$. Tuomet bet kuriam plokštumos taškui O teisinga lygybė $\vec{OC} =$

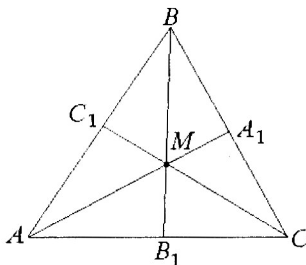


10 pav.

$= \vec{OA} + \vec{AC} = \vec{OA} + \dfrac{\alpha}{\beta}\vec{CB}$. Kadangi $\vec{CB} = = \vec{OB} - \vec{OC}$, tai $\vec{OC} = \vec{OA} + \dfrac{\alpha}{\beta}\vec{OB} - \dfrac{\alpha}{\beta}\vec{OC}$, arba $(\alpha + \beta)\,\vec{OC} = \beta\vec{OA} + \alpha\vec{OB}$, ką ir reikėjo įrodyti.

1 pavyzdys. Trikampio ABC pusiaukraštinės susikerta taške M. Įrodysime, kad bet kuriam plokštumos taškui O teisinga lygybė

$$\vec{OM} = \frac{1}{3}\left(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}\right).$$



11 pav.

Kadangi trikampio ABC pusiaukraštinės AA_1, BB_1, CC_1 susikerta taške M ir $AM : MA_1 = BM : MB_1 = CM : MC_1 = 2 : 1$ (11 pav.), tai pagal 2 teoremą bet kuriam

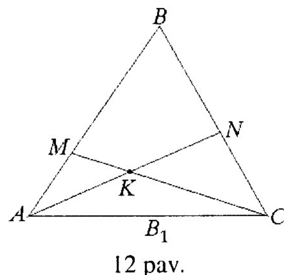
plokštumos taškui O teisinga lygybė $\overrightarrow{OM} = \dfrac{\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OA_1}}{3}$. Kadangi $\overrightarrow{OA_1} = \dfrac{\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{2}$, tai iš čia ir išplaukia įrodomoji lygybė.

Kadangi įrodytoji lygybė teisinga bet kuriam plokštumos taškui O, tai ji teisinga ir kai taškai O ir M sutampa. Taigi gavome, kad $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{O}$; čia taškas M yra trikampio ABC pusiaukraštinių sankirtos taškas.

2 pavyzdys. Trikampio ABC kraštinėje AB yra taškas M, o kraštinėje BC – taškas N; be to, $AM : MB = 2 : 5$, $BN : NC = 4 : 3$. Tiesės AN ir CM kertasi taške K. Rasime santykį $AK : KN$ (12 pav.).

Sakykime, kad $AK : KN = x$, tuomet pagal 2 teoremą $\overrightarrow{CK} = \dfrac{\overrightarrow{CA} + x\overrightarrow{CN}}{1+x}$. Kadangi $CN : NB = 3 : 4$, tai $\overrightarrow{CN} = \dfrac{3}{7}\overrightarrow{CB}$. Taigi

$$\overrightarrow{CK} = \frac{\overrightarrow{CA} + \frac{3}{7}x\overrightarrow{CB}}{1+x}. \qquad (2)$$



12 pav.

Kita vertus, vektoriai $\overrightarrow{CK}$ ir $\overrightarrow{CM}$ kolinearūs, t. y.,

$$\overrightarrow{CK} = y\overrightarrow{CM} = \frac{y}{7}(5\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{CB}). \qquad (3)$$

Vektorius $\overrightarrow{CK}$ (2) ir (3) lygybėmis išreikštas tais pačiais nekolineariais vektoriais $\overrightarrow{CA}$ ir $\overrightarrow{CB}$. Pagal 1 teoremą šios išraiškos turi sutapti, t. y., turi būti teisingos lygybės $\dfrac{1}{1+x} = \dfrac{5y}{7}$, $\dfrac{3x}{7(1+x)} = \dfrac{2y}{7}$. Iš čia gauname, kad $x = \dfrac{14}{15}$. Taigi $AK : KN = 14 : 15$.

3. Sakykime, kad plokštumoje duoti du vektoriai $\vec{a}$ ir $\vec{b}$, kampo tarp jų didumas φ. Skaičius, lygus vektorių $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ modulių sandaugai, padaugintai iš kosinuso kampo tarp jų, yra vadinamas vektorių $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ *skaliarine sandauga*:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\varphi .$$

Vektorių skaliarinė daugyba pasižymi šiomis savybėmis:

1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$,

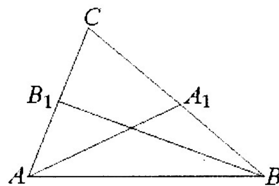
2) $\alpha(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \alpha \vec{a} \cdot \vec{b}$,

3) $\vec{a}(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$,

4) $\vec{a}^2 = \vec{a} \cdot \vec{a} > 0$, jei $\vec{a} \neq 0$ ir $\vec{a}^2 = 0$ tada ir tik tada, kai $\vec{a} = \vec{0}$.

Iš skaliarinės sandaugos apibrėžimo išplaukia, kad vektoriai $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ statmeni tada ir tik tada, kai jų skaliarinė sandauga lygi nuliui. Be to, kampas φ tarp vektorių $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ apskaičiuojamas pagal formulę

$\cos\varphi = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$, o vektoriaus $\vec{a}$ modulis skaičiuojamas taip $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2}$.



13 pav.

3 pavyzdys. Į didesnę trikampio kraštinę nubrėžiama mažesnė pusiaukraštinė. Įrodysime tai.

Sakykime, kad trikampio ABC kraštinė CB didesnė už kraštinę AC (13 pav.). Įrodysime, kad į ją nubrėžta pusiaukraštinė AA_1 trumpesnė už pusiaukraštinę BB_1. Akivaizdu, kad $\vec{AA_1} = \vec{AC} + \frac{1}{2}\vec{CB}$, $\vec{BB_1} =$

$= \vec{BC} + \frac{1}{2}\vec{CA}$. Pakėlę abi šias lygybes skaliariškai kvadratu, gauname

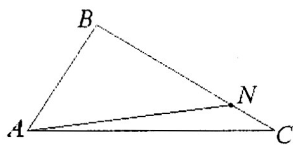
$$\vec{AA_1}^2 = \vec{AC}^2 + \vec{AC}\cdot\vec{CB} + \frac{1}{4}\vec{CB}^2,\quad \vec{BB_1}^2 = \vec{BC}^2 + \vec{BC}\cdot\vec{CA} + \frac{1}{4}\vec{CA}^2.$$

Kadangi $\vec{AC}\cdot\vec{CB} = \vec{BC}\cdot\vec{CA}$, tai iš šių lygybių išplaukia

$$\vec{AA_1}^2 - \vec{BB_1}^2 = \frac{3}{4}\vec{AC}^2 - \frac{3}{4}\vec{CB}^2.$$

Kadangi $CB > AC$, tai $\frac{3}{4}\left(\vec{AC}^2 - \vec{CB}^2\right) < 0$, t.y., $\vec{AA_1}^2 - \vec{BB_1}^2 < 0$, vadinasi, $\vec{AA_1}^2 < \vec{BB_1}^2$, o tai reiškia, kad $AA_1 < BB_1$.

4 pavyzdys. Trikampio ABC kraštinės AB ir AC lygios atitinkamai 4 ir 8, kampas A lygus 60°, taškas N dalija kraštinę BC santykiu $BN : NC = 3 : 1$. Rasime atkarpos AN ilgį (14 pav.).



14 pav.

Kadangi $BN : NC = 3 : 1$, tai pagal 2 teoremą $\vec{AN} = \frac{1}{4}\left(\vec{AB} + 3\vec{AC}\right)$. Pakėlę šią lygybę skaliariškai kvadratu, gausime

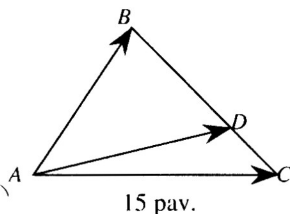
$$\vec{AN}^2 = \frac{1}{16}\left(\vec{AB}^2 + 6\vec{AB}\cdot\vec{AC} + 9\vec{AC}^2\right) =$$

$$= \frac{1}{16}\left(|\vec{AB}^2| + 6\cdot|\vec{AB}|\cdot|\vec{AC}|\cdot\cos 60^\circ + 9|\vec{AC}^2|\right) =$$

$$= \frac{1}{16}\left(4^2 + 6\cdot 4\cdot 8\cdot\frac{1}{2} + 9\cdot 8^2\right) = 43.$$

Taigi, $|\vec{AN}| = \sqrt{\vec{AN}^2} = \sqrt{43}$.

5 pavyzdys. Trikampio ABC kraštinių ilgiai $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$. Kraštinėje BC yra taškas D ir $BD : DC = \lambda$. Rasime atkarpos AD ilgį (15 pav.).



15 pav.

Kadangi $BD : DC = \lambda$, tai pagal 2 teoremą $\vec{AD} = \dfrac{\vec{AB} + \lambda \vec{AC}}{1+\lambda}$. Keliame šią lygybę skaliariškai kvadratu ir gauname

$$\vec{AD}^2 = \frac{1}{(1+\lambda)^2}\left(\vec{AB}^2 + 2\lambda \vec{AB}\cdot\vec{AC} + \lambda^2 \vec{AC}^2\right).$$

Kadangi $\vec{AB}\cdot\vec{AC} = |\vec{AB}|\cdot|\vec{AC}|\cos A = bc\cos A$, o pagal kosinusų teoremą $\cos A = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$, tai $\vec{AB}\cdot\vec{AC} = \dfrac{1}{2}\left(b^2+c^2-a^2\right)$.

Tuomet $\vec{AD}^2 = \dfrac{1}{(1+\lambda)^2}\left(c^2 + \lambda\left(b^2+c^2-a^2\right) + \lambda^2 b^2\right)$,

t.y., $|\vec{AD}| = \sqrt{\dfrac{c^2+\lambda b^2}{1+\lambda} - \dfrac{\lambda a^2}{(1+\lambda)^2}}$.

Gautoji lygybė yra vadinama *Stiuarto formule*. Jos atskiri atvejai yra pusiaukraštinės AD (kai $\lambda = 1$), pusiaukampinės AD (kai $\lambda = \dfrac{c}{b}$) ilgių išraiškos.

KETVIRTOJI UŽDUOTIS

1. Penkiakampio $ABCDE$ kraštinių AB, BC, CD ir DE vidurio taškai yra atitinkamai M, P, N ir Q. Atkarpų MN ir PQ vidurio taškai yra K ir L. Įrodykite, kad tiesės AE ir KL lygiagrečios ir raskite atkarpų AE ir KL ilgių santykį.

2. Atkarpų AB ir CD vidurio taškai P ir Q. Įrodykite, kad atkarpų AC, BD ir PQ vidurio taškai yra vienoje tiesėje.

3. Trapecijos $ABCD$ šoninių kraštinių AD ir BC vidurio taškai yra M ir N. Ar tiesės AN ir CM yra lygiagrečios?

4. Trikampio ABC kraštinėse AB ir AC yra taškai M ir N, be to, $AM : MB = 3 : 2$, $AN : NC = 1 : 4$. Tiesės CM ir BN kertasi taške P. Raskite santykius $BP : PN$ ir $CP : PM$.

5. Jei trikampio ABC pusiaukraštinės lygiagrečios trikampio $A'B'C'$ kraštinėms, tai trikampio $A'B'C'$ pusiaukraštinės lygiagrečios trikampio ABC kraštinėms. Įrodykite tai.

6. Lygiagretainio kraštinių ilgiai yra 2 ir 3, kampas tarp jų lygus 60°. Raskite kampą tarp lygiagretainio įstrižainių.

7. Kvadrato $ABCD$ kraštinės AD vidurys yra taškas E, taškas F yra įstrižainėje AC ir $AF : FC = 3$. Įrodykite, kad tiesės EF ir FB yra statmenos.

8. Kvadrato $ABCD$ kraštinėse AB ir CD yra taškai M ir N, be to, $AM : MB = 1 : 2$, $CN : ND = 5 : 1$. Tiesė MN kerta įstrižainę AC taške P. Raskite kampą APD.

9. Įrodykite, kad trapecijos įstrižainių kvadratų suma lygi jos šoninių kraštinių kvadratų sumai, sudėtai su pagrindų ilgių dviguba sandauga.

10. Trikampis ABC – lygiakraštis, kraštinėse AC ir AB yra taškai D ir E, be to, $DC = 2AD$, $AE = 2EB$. Tiesės BD ir CE susikerta taške Q. Raskite kampą AQC.



V. PLOKŠČIŲJŲ FIGŪRŲ PLOTAI

Juozas Šinkūnas
(Vilniaus pedagoginis universitetas)

Griežtai apibrėžiant plokščios figūros plotą reikia remtis realiųjų skaičių teorija, ribų teorija bei apibrėžtiniu integralu. Čia apsiribosime tik daugiakampių plotų skaičiavimu, remdamiesi vidurinės mokyklos matematikos vadovėliuose pateiktomis žiniomis apie figūrų plotus. Priminsime keletą plotų skaičiavimo formulių:

1. Stačiakampio, kurio kraštinės a ir b, plotas lygus $a \cdot b$.

2. Lygiagretainio, kurio pagrindas a, o aukštinė h, plotas lygus $a \cdot h$.

3. Jeigu trikampio ABC kraštinės yra $AB = c$, $BC = a$ ir $CA = b$, pusperimetris $p = \frac{a+b+c}{2}$, h_a, h_b ir h_c – aukštinės, išvestos iš viršūnių A, B ir C, R – apibrėžto apie trikampį ABC apskritimo spindulys, r – įbrėžto į šį trikampį apskritimo spindulys, tai

a) $S = \frac{1}{2}a \cdot h_a = \frac{1}{2}b \cdot h_b = \frac{1}{2}c \cdot h_c$;

b) $S = \frac{1}{2}a \cdot b\sin C = \frac{1}{2}b \cdot c\sin A = \frac{1}{2}a \cdot c\sin B$;

c) $S = \frac{abc}{4R}$;

d) $S = pr$;

e) $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ – ši formulė vadinama Herono formule.

4. Trapecijos, kurios pagrindai a ir b, o aukštinė h, plotas lygus $\frac{a+b}{2} \cdot h$.

5. Bet kokio daugiakampio plotas apskaičiuojamas jį suskaidžius į trikampius ar į figūras, kurių plotus jau mokame skaičiuoti.

6. Jeigu daugiakampiai $ABCD...$ ir $A_1B_1C_1D_1...$, yra panašūs, tai $S_{ABCD...} = k^2 S_{A_1B_1C_1D_1...}$; čia k – panašumo koeficientas.

Išspręsime keletą pavyzdžių.

1 pavyzdys. Senovės Egipte iškilojo keturkampio formos žemės sklypo $ABCD$ plotas S buvo apskaičiuojamas pagal formulę $S=\dfrac{AB+CD}{2}\cdot\dfrac{BC+AD}{2}$. Palyginsime taip apskaičiuotą keturkampio plotą su tiksliu šio sklypo plotu.

Sprendimas. Sakykime $AB=a$, $BC=b$, $CD=c$, $DA=d$. Tada

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}a\cdot b\sin B\le\frac{a\,b}{2},$$

$$S_{BCD}\le\frac{1}{2}b\,c,\ S_{CDA}\le\frac{cd}{2},\ S_{DAB}\le\frac{a\,d}{2}.$$

Sudėję šias nelygybes, gauname:

$$2S_{ABCD}=S_{ABC}+S_{BCD}+S_{CDA}+S_{DAB}\le$$

$$\le\frac{ab+cb+ad+cd}{2}=\frac{(a+c)(b+d)}{2}.$$

1 pav.

Taigi $S_{ABCD}\le\dfrac{AB+CD}{2}\cdot\dfrac{BC+DA}{2}$. Lygybė galima tik tada, kai trikampis ABC yra stačiakampis.

2 pavyzdys. Rasime trapecijos, kurios pagrindai lygūs 89 cm ir 142 cm, o įstrižainės – 120 cm ir 153 cm, plotą.

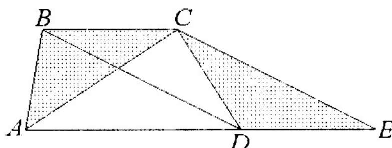
Sprendimas. Nubrėžiame tiesę CE, lygiagrečią BD. Keturkampis $BCED$ – lygiagretainis, todėl $BD=CE=153$ cm, $BC=DE=89$ cm. Vadinasi,

$$p=p_{ACE}=\frac{AC+CE+AD+DE}{2}=252,$$

$$p-AC=132,\ p-CE=99,\ p-AE=21.$$

Kadangi užtušuotų trikampių plotai yra lygūs, tai

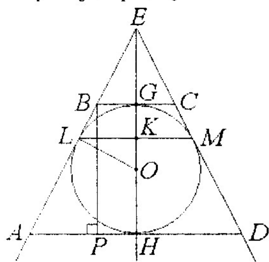
$$S_{ABCD}=S_{ABC}+S_{ACD}=S_{ACD}+S_{CDE}=S_{ACE}.$$



2 pav.

Taigi $S_{ABCD} = S_{ACE} = \sqrt{252 \cdot 132 \cdot 99 \cdot 21} = 8316\,(\text{cm}^2)$.

3 pavyzdys. Į kampą įbrėžtas spindulio R apskritimas. Apskritimo styga, jungianti lietimosi taškus, lygi a. Lygiagrečiai šiai stygai nubrėžtos dvi apskritimo liestinės, kurios nuo kampo atkerta trapeciją. Rasime trapecijos plotą.



3 pav.

Sprendimas. Duota: $LM = a$, $OL = R$, BC ir AD – apskritimo liestinės. Rasti S_{ABCD}. Nubrėžkime kampo E pusiaukampinę OE ir jos susikirtimo su BC, LM ir AD taškus pažymėkime atitinkamai G, K ir H. Kadangi $KL = KM$, tai $GB = GC$, $HA = HD$. Iš čia išplaukia, kad trapecija $ABCD$ yra lygiašonė ($AB = AL + LB = HA + GB = HD + GC = DM + MC = DC$). Taigi

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AD + BC) \cdot GH = \frac{1}{2}(AB + CD) \cdot GH = AB \cdot GH.$$

Iš taško B nubrėžę statmenį BP, gauname du panašius trikampius:

$$\Delta BPA \sim \Delta LKO \; (\angle LOK = \angle BAP,\ \angle LKO = \angle BPA = 90^\circ)$$

Iš čia:

$$\frac{LK}{LO} = \frac{BP}{AB}, \text{ t.y. } \frac{a/2}{R} = \frac{2R}{AB}, \quad AB = \frac{4R^2}{a}.$$

Taigi

$$S_{ABCD} = \frac{4R^2}{a} \cdot 2R = \frac{8R^3}{a}.$$

1 pratimas. Trapecijos pagrindų ilgiai yra a ir b. Raskite atkarpos, lygiagrečios pagrindams ir dalijančios trapecijos plotą pusiau, ilgį.

4 pavyzdys. Rasime trikampio, kurio plotas $84\,\text{cm}^2$, o kraštinės – trys paeiliui einantys natūralieji skaičiai, perimetrą.

Sprendimas. Sakykime, trikampio kraštinių ilgiai yra $a = x - 1$, $b = x$, $c = x + 1$. Tada $p = \frac{3x}{2}$, $p - a = \frac{x+2}{2}$, $p - b = \frac{x}{2}$, $p - c = \frac{x-2}{2}$. Pagal Herono formulę: $\sqrt{\frac{3x}{2} \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{x+2}{2} \cdot \frac{x-2}{2}} = 84$.

Iš čia $x^4 - 4x^2 - 37632 = 0$, $x = 14$. Taigi trikampio kraštinės lygios 13 cm, 14 cm, 15 cm ir $P = 42$ cm.

Trikampiai, kurių kraštinių ilgiai ir plotas išreikšti natūraliaisiais skaičiais, vadinami *Herono trikampiais*, o šių kraštinių ilgių rinkiniai - *Herono trejetais*. Pavyzdžiui, trikampis, kurio kraštinės 13 cm, 14 cm, 15 cm yra Herono trikampis, o skaičių trejetas (13; 14; 15) – Herono trejetas.

Pastebėsime, kad Pitagoro trejetas (natūralieji skaičiai a, b, c, tenkinantys lygybę $a^2 + b^2 = c^2$) yra Herono trejetas. Herono trikampį galima gauti iš dviejų Pitagoro trikampių, turinčių po vieną lygų statinį, juos suglaudus lygiaisiais statiniais.

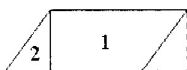
Pavyzdžiui, Herono trikampį (13; 14; 15) galima gauti iš dviejų Pitagoro trikampių $(5; 12; 13)$ ir $(9; 12; 15)$. Iš Pitagoro trikampių $(5; 12; 13)$ ir $(35; 12; 37)$ gaunamas Herono trikampis $(40; 13; 37)$, o iš Pitagoro trikampių $(9; 40; 41)$ ir $(42; 40; 58)$ gaunamas Herono trikampis $(51; 41; 58)$.

2 pratimas. Pagal formulę $(m^2 - n^2, 2mn, m^2 + n^2)$, $m, n \in \mathrm{N}$ kiekvienam Pitagoro trikampiui $(8; 15; 17)$, $(7; 24; 25)$, $(16; 63; 65)$ pasirinkite po tokį Pitagoro trikampį, kad būtų galima sudaryti tris Herono trikampius.

Du daugiakampiai vadinami *lygiadaliais*, jeigu vieną daugiakampį galime supjaustyti į dalis taip, kad iš tų dalių būtų galima sudėti kitą daugiakampį.

Lygiadalių figūrų pavyzdžiai:

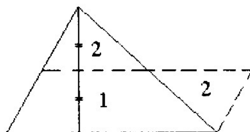
a)

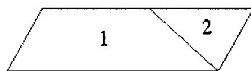




4 pav.

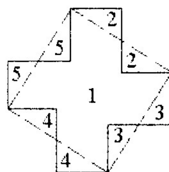
b)

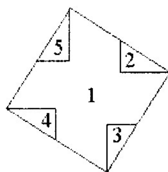




5 pav.

c)





6 pav.

Nesunku įsitikinti, kad daugiakampiai D_1 ir D_3 yra lygiadaliai, kai lygiadaliai yra daugiakampiai D_1 ir D_2, D_2 ir D_3.

Akivaizdu, kad du lygiadaliai daugiakampiai yra lygiapločiai. Teisingas ir atvirkščias teiginys:

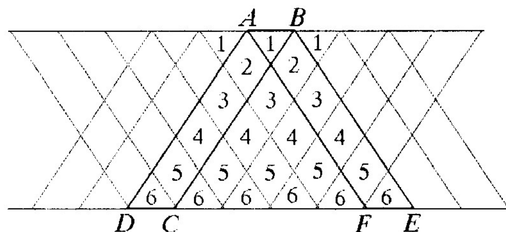
Bojai[1]- Gervino[2] teorema. Du daugiakampiai, kurių plotai yra lygūs, yra lygiadaliai.

Šios teoremos neįrodinėsime. Ją pailiustruosime pavyzdžiais.

Pastebėsime, kad briaunainiams analogiška teorema neteisinga, t. y. lygiatūriai briaunainiai ne visada yra lygiadaliai. Pavyzdžiui, tetraedras ir jam lygiatūris kubas nėra lygiadaliai (tai įrodė M.Denas[3] 1901 m.).

5 pavyzdys. Įsitikinkime, kad du lygiagretainiai *ABCD* ir *ABEF*, kurie turi vienodus pagrindus ir vienodas aukštines, yra lygiadaliai.

Sprendimas. Tiesėje *AB* atidėkime atkarpas, lygias atkarpai *AB* ir per dalijimo taškus nubrėžkime tieses, lygiagrečias tiesėms *AD* ir *AF*. Jos abu lygiagretainius padalins į vienodą lygų dalių skaičių. Lygios dalys pažymėtos vienodais skaičiais.



7 pav.

[1] F. Bolyai (1775-1856) - vengrų matematikas.

[2] P. Gervien – vokiečių matematikas

[3] M.Dehn (1878–1952) – vokiečių matematikas.

Pastaba. Šiuos lygiagretainius į lygias dalis galima padalyti ir kitaip. Brėžinyje nubrėžtos tiesės yra lygiagrečios atitinkamoms lygiagretainių kraštinėms. Taip dalijant gavome daugiau dalių. Labai įdomūs (ir sunkūs) uždaviniai: duotąjį daugiakampį padalyti į mažiausią skaičių dalių, iš kurių būtų galima sudėti kitą lygiaplotį daugiakampį. Čia mes tokių uždavinių nespręsime.

8 pav.

6 pavyzdys. Įsitikinkime, kad du trikampiai AMB ir $AM'B$, turintys lygius pagrindus ir aukštines, yra lygiadaliai.

Sprendimas. Nubrėžkime lygiagretainį $ABCD$, lygiaplotį (lygiadalį) trikampiui AMB, ir lygiagretainį $ABC'D'$, lygiaplotį (lygiadalį) trikampiui ABM'. Abu lygiagretainiai yra lygiadaliai, tai lygiadaliai yra ir trikampiai. Tų trikampių lygios dalys pažymėtos vienodais skaičiais. Brėžinyje $D'E \| AM'$, $DF \| BM$.

9 pav.

7 pavyzdys. Bet kokiam trikampiui ABC nubrėšime nelygų lygiadalį trikampį.

Sprendimas. Nubrėžiame tiesę, lygiagrečią pagrindui AC ir nekertančią trikampio kraštinių (žr. 10 pav.). Randame šios tiesės ir tiesės AB susikirtimo tašką B'. Nubrėžiame atkarpą $B'C$ ir atkarpą BC', lygiagrečią $B'C$. Trikampis $AB'C'$ yra lygiadalis trikampiui ABC.

Iš tikrųjų $\Delta ABC = \Delta ABC' + \Delta BCC'$, o $\Delta AB'C' = \Delta ABC' + \Delta BC'B'$.

Kadangi trikampiai BCC' ir $BC'B'$ yra lygiadaliai (6 pavyzdys), tai lygiadaliai ir trikampiai ABC ir $AB'C'$.

3 pratimas. Duotajam trikampiui ABC nubrėžkite lygiadalį trikampį $AB'C'$, kurio aukštinė $B'D'$ būtų trumpesnė už trikampio ABC aukštinę BD.

10 pav.

11 pav.

8 pavyzdys. Tiese, einančia per keturkampio $ABCD$ viršūnę A, padalysime keturkampį į dvi dalis, kurių plotų santykis $m:n$.

Sprendimas. Pirmiausia nubrėžiame trikampį ABD_1, lygiaplotį keturkampiui $ABCD$ (žr. 11 pav.). Per viršūnę D brėžiame tiesę DD_1, lygiagrečią keturkampio įstrižainei AC. Akivaizdu, kad $S_{ABD_1} = S_{ABCD}$. Kraštinę BD_1 padalijame santykiu $m:n$ (brėžinyje taškas M_1 kraštinę BD_1 dalija santykiu 3:1). Tiesė AM_1 – trikampio ABD_1 plotą dalija santykiu $m:n$. Per tašką M_1 brėžiame tiesę, lygiagrečią AC. Ji kerta kraštinę DC taške M.

Kadangi

$$S_{ACM_1} = S_{ACM},$$

tai

$$S_{AM_1D_1} = S_{ACD_1} - S_{ACM_1} = S_{ACD} - S_{ACM} = S_{AMD}.$$

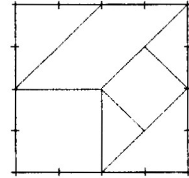
Taigi

$$S_{ABCM} : S_{AMD} = S_{ABM_1} : S_{AM_1D_1} = m:n.$$

Matyti, kad santykiu $m:n$ buvo galima dalyti ne atkarpą BD_1, o įstrižainę BD ir per dalijimo tašką M' išvesti tiesę, lygiagrečią AC, kuri kerta kraštinę CD taške M. Tiesė AM keturkampį $ABCD$ dalija į dvi dalis, kurių plotų santykis $m:n$.

Mokėdami keturkampį padalyti į dvi dalis, kurių plotų santykis $m:n$, galima tiesėmis, einančiomis per vieną keturkampio viršūnę, keturkampį padalyti į keletą lygiapločių dalių.

Pavyzdžiui, įstrižainę BD padaliję į keturias lygias dalis $BK'=K'L'=L'M'=M'D$ ir išvedę tieses $K'K$, $L'L$ ir $M'M$, lygiagrečias įstrižainei AC, gausime, kad tiesės AK, AL ir AM keturkampį $ABCD$ padalija į 4 lygiaplotes dalis.


12 pav.

4 pratimas. Iš kartono lapo iškirpkite kvadratą ir jį sukarpykite kaip parodyta brėžinyje. Sumaišę šias dalis, pabandykite:

1) sudėti kvadratą (nežiūrėdami į brėžinį);

2) sudėti stačiakampį (ne kvadratą!).

5 pratimas. Nubrėžkite iškilųjį keturkampį $ABCD$ ir kraštinėje AB pažymėkite tašką E. Tiese, einančia per tašką E, keturkampį $ABCD$ padalykite į dvi lygias dalis.

PENKTOJI UŽDUOTIS

1. Ant stačiojo trikampio, kurio statiniai lygūs a ir b, visų kraštinių į trikampio išorę nubrėžti kvadratai. Kvadratų viršūnės, nesutampančios su trikampio viršūnėmis, nuosekliai sujungtos atkarpomis. Raskite gautojo šešiakampio plotą. Apskaičiuokite šešiakampio plotą, kai $a = 5\,\text{cm}$, $b = 12\,\text{cm}$.

2. Per trikampio ABC kraštinės AC tašką D nubrėžtos tiesės, lygiagrečios kraštinėms AB ir BC. Jos kerta trikampio kraštines BC ir AB taškuose E ir F. Raskite lygiagretainio $DFBE$ plotą, jeigu trikampių AFD ir DEC plotai lygūs S_1 ir S_2.

3. Trikampyje ABC, kurio kraštinės $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$, nubrėžtos kampų A ir C pusiaukampinės AD ir CE. Raskite trikampių ABC ir AED plotų santykį. Apskaičiuokite šį santykį, kai $a = 20\,\text{cm}$, $b = 28\,\text{cm}$, $c = 21\,\text{cm}$.

4. Taškai E, F, G ir H yra lygiagretainio $ABCD$ kraštinių AB, BC, CD ir DA vidurio taškai. Raskite figūros, apribotos tiesėmis AF, BG, CH ir DE, plotą, jeigu lygiagretainio $ABCD$ plotas lygus S.

5. Į lygiašonę trapeciją, kurios kampas prie pagrindo lygus 60°, įbrėžtas apskritimas. Kokiu santykiu tiesė, jungianti trapecijos šoninių kraštinių lietimosi su apskritimu taškus, dalija trapecijos plotą?

6. Apie statųjį trikampį apibrėžto ir į jį įbrėžto apskritimų spindulių santykis yra 5:2. Raskite trikampio plotą, jeigu vieno statinio ilgis lygus a.

7. Lygiagretainio $ABCD$ įstrižainė AC lygi 78 cm, o BD – 50 cm.
1. Raskite lygiagretainio kraštines, jeigu jo plotas lygus 1680 cm^2;
2. Įsitikinkite, kad trikampis AOD yra Herono trikampis. Raskite du Pitagoro trikampius, iš kurių galima sudėti trikampį AOD.

8. Nubraižykite 5 cm × 6 cm stačiakampį ir jį padalykite į dalis, iš kurių būtų galima sudėti tokio pat ploto kvadratą.

Nurodymas. Pirmiausia stačiakampį padalykite į tokias dalis, iš kurių būtų galima sudėti lygiaplotį lygiagretainį, turintį vieną kraštinę, lygią kvadrato kraštinei. Kvadrato kraštinė yra stačiakampio kraštinių geometrinis vidurkis.

9. Nubraižykite bet kokį trikampį ABC. Ilgiausioje kraštinėje AB pažymėkite tašką D. Per šį tašką nubrėžkite dvi tieses, kurios trikampį dalytų į 3 lygiaplotes dalis. Išnagrinėkite atvejus:

a) $AD = \frac{1}{3}AB$; b) $AD = \frac{1}{2}AB$;

c) $AD < \frac{1}{3}AB$; d) $\frac{1}{3}AB < AD < \frac{2}{3}AB$.

10. Trys gyvenvietės A, B ir C sujungtos tiesiais keliais (atkarpomis AB, BC, ir AC). Prie kelio atkarpos AB glaudžiasi kvadratinis laukas su kraštine $\frac{1}{2}AB$, prie kelio atkarpos BC glaudžiasi kvadratinis laukas su kraštine BC, o prie kelio atkarpos AC – stačiakampio formos miškas. Raskite miško plotą, jeigu jo ilgis lygus AC, plotis yra 4 km ir jo plotas 20 km^2 didesnis už abiejų laukų plotų sumą.

Nurodymas. Remkitės trikampio nelygybe $b \le a + c$.



VI. IRACIONALIOSIOS LYGTYS IR NELYGYBĖS

Stefa Stakninė
(Vilniaus Gabijos gimnazija)

Pradėdami nagrinėti šią temą bei spręsti užduotis, atsiverskime mokyklinį vadovėlį ir prisiminkime n-tojo laipsnio šaknų savybes.

Sakykime, $a \geq 0$, o n – natūralusis skaičius, $n \geq 2$. Neneigiamas realusis skaičius x, su kuriuo galioja lygybė $x^n = a$, vadinamas n-tojo laipsnio šaknimi iš a ir žymimas $\sqrt[n]{a}$.

Kai $a < 0$, o n – nelyginis natūralusis skaičius, $n \geq 3$, tai neigiamas skaičius x, su kuriuo galioja lygybė $x^n = a$, taip pat vadinamas n-tojo laipsnio šaknimi iš a ir žymimas $\sqrt[n]{a}$.

Vadinasi, nelyginio laipsnio šaknys turi prasmę su bet kuria pošaknio reikšme, o lyginio – tik su neneigiama.

Jeigu lygtyje yra reiškinys su nežinomuoju po šaknies ženklu arba toks reiškinys keliamas trupmeniniu laipsniu, tai lygtį vadiname iracionaliąja. Iracionaliųjų lygčių pavyzdžiai:

$$\sqrt{11x - 1} + \sqrt{2 - x^2} = 2,$$

$$\sqrt{2 + x} - 3x = x + \pi,$$

$$x^{\frac{1}{7}} = 1.$$

Išspręsti iracionaliąją lygtį reiškia rasti visas kintamojo x reikšmes, su kuriomis ji tampa teisinga lygybe arba įrodyti, kad tokių reikšmių nėra.

1 pavyzdys. Įrodykime, kad lygtis

$$\sqrt{2x + 3} + \sqrt{x + 3} = 0$$

sprendinių neturi.

Sprendimas. Remdamiesi šaknų savybėmis gauname, kad lygtis apibrėžta su $x \geq -\frac{3}{2}$. Kadangi su kiekvienu tokiu x šaknis $\sqrt{2x+3}$ yra neneigiama, o $\sqrt{x+3}$ teigiama, tai jų suma su visais $x \geq -\frac{3}{2}$ bus didesnė už nulį. Vadinasi, lygtis sprendinių neturi.

Dažnai tenka spręsti iracionaliąsias lygtis $\sqrt{f(x)} = g(x)$. Pamatę tokią lygtį, neskubėkime kelti abiejų pusių kvadratu, nes tokiu būdu iš lygties $f(x) = g^2(x)$ rasime ne tik lygties $\sqrt{f(x)} = g(x)$ sprendinius, bet ir lygties $\sqrt{f(x)} = -g(x)$ sprendinius. Aišku, kad lygtis $\sqrt{f(x)} = g(x)$ ekvivalenti šiai sistemai:

$$\begin{cases} f(x) = g^2(x), \\ g(x) \geq 0. \end{cases}$$

2 pavyzdys. Išspręskime lygtį $\sqrt{-3x+3} = x-1$.

Sprendimas.

$$\sqrt{-3x+3} = x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} 3-3x = (x-1)^2, \\ x-1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x - 2 = 0, \\ x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \text{ arba } x = -2, \\ x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$$

Ats.: 1.

Toks sprendimo būdas tinka visoms pavidalo $\sqrt[2n]{f(x)} = g(x)$, $n \in N$ lygtims, nes

$$\sqrt[2n]{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) = g^{2n}(x). \end{cases}$$

Kitas iracionaliųjų lygčių sprendimo būdas yra kintamojo keitimas.

3 pavyzdys. Išspręskime lygtį

$$\sqrt{2x^2+5x-2} - \sqrt{2x^2+5x-9} = 1.$$

Sprendimas. Pažymėkime $2x^2+5x-2 = t$. Tada gauname lygtį $\sqrt{t} = \sqrt{t-7} + 1$. Keliame abi puses kvadratu:

$$t = t-7+2\sqrt{t-7}+1, \ \sqrt{t-7} = 3, \ t = 16.$$

Tuomet

$$2x^2+5x-2 = 16, \ 2x^2+5x-18 = 0, \ x_1 = 2, \ x_2 = -4{,}5.$$

Patikrinę įsitikiname, kad abi šaknys tenkina lygtį.

Ats.: 2; –4,5.

4 pavyzdys. Išspręskime lygtį

$$\sqrt{x-1-2\sqrt{x-2}}+\sqrt{x+2-4\sqrt{x-2}}=1.$$

Sprendimas. Pažymėkime $\sqrt{x-2}=t$.

Tuomet $x=t^2+2$ ir duotoji lygtis tampa tokia:

$\sqrt{t^2+2-1-2t}+\sqrt{t^2+2+2-4t}=1$,

$\sqrt{t^2-2t+1}+\sqrt{t^2-4t+4}=1$,

$\sqrt{(t-1)^2}+\sqrt{(t-2)^2}=1$,

$|t-1|+|t-2|=1$.

Išsprendę šią lygtį, gauname $1\le t\le 2$. Kadangi $t=\sqrt{x-2}$, tai

$1\le\sqrt{x-2}\le 2$,

$1\le x-2\le 4$,

$3\le x\le 6$.

Ats.: $x\in[3;6]$.

Iracionaliąsias lygtis $\sqrt[n]{a-f(x)}+\sqrt[n]{b+f(x)}=g(x)$ galima spręsti įvedant du kintamuosius $u=\sqrt[n]{a-f(x)}$, $v=\sqrt[n]{b+f(x)}$. Tuomet vietoj lygties sprendžiama lygčių sistema

$$\begin{cases}u+v=g(x),\\ u^n+v^n=a+b.\end{cases}$$

5 pavyzdys. Išspręskime lygtį

$$\sqrt[3]{2x+1}+\sqrt[3]{1-2x}=2.$$

Sprendimas. Tegu $u=\sqrt[3]{2x+1}$, $v=\sqrt[3]{1-2x}$. Tada $u^3+v^3=2$. Toliau sprendžiame sistemą:

$$\begin{cases}u+v=2,\\ u^3+v^3=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u+v=2,\\ (u+v)(u^2-uv+v^2)=2\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}v=2-u,\\ u^2-2u+1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}v=2-u,\\ u=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}v=1,\\ u=1.\end{cases}$$

Kintamąjį x randame iš sistemos:

$$\begin{cases} \sqrt[3]{2x+1} = 1, \\ \sqrt[3]{1-2x} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0.$$

Ats.: 0.

Lygtį $\sqrt[3]{f(x)} + \sqrt[3]{g(x)} = \varphi(x)$ galima spręsti abi puses keliant kubu. Gauname

$$f(x) + g(x) + 3\sqrt[3]{f(x)g(x)}\left(\sqrt[3]{f(x)} + \sqrt[3]{g(x)}\right) = \varphi^3(x),$$

$$f(x) + g(x) + 3\sqrt[3]{f(x)g(x)}\,\varphi(x) = \varphi^3(x).$$

6 pavyzdys. Išspręskime lygtį

$$\sqrt[3]{2x-1} + \sqrt[3]{x-1} = 1.$$

Sprendimas. Abi lygties puses pakėlę kubu, gauname:

$2x-1+x-1+3\sqrt[3]{(2x-1)(x-1)}\left(\sqrt[3]{2x-1} + \sqrt[3]{x-1}\right) = 1,$

$3x-2+3\sqrt[3]{(2x-1)(x-1)} = 1,$

$3\sqrt[3]{(2x-1)(x-1)} = 3-3x,$

$\sqrt[3]{(2x-1)(x-1)} = 1-x,$

$(2x-1)(x-1) = (1-x)^3.$

Iš čia $x_1 = 0$, $x_2 = 1$. Patikrinę įsitikiname, kad $x_1 = 0$ nėra duotosios lygties sprendinys.

Ats.: 1.

Sprendžiant iracionaliąsias nelygybes kartais jos keičiamos ekvivalenčiomis racionaliųjų nelygybių sistemomis. Norėdami išvengti klaidų, turime atsižvelgti į nelygybės apibrėžimo sritį.

7 pavyzdys. Išspręskime nelygybę

$$(x-1)\sqrt{x^2-x-2} \geq 0.$$

Sprendimas. Kintamojo reikšmės, su kuriomis nelygybė turi prasmę, tenkina sąlygą $x^2-x-2 \geq 0$. Iš čia gauname $x \leq -1$ arba $x \geq 2$. Kai $x-1 \geq 0$, nelygybė tenkinama su $x \in [2; +\infty)$. Kai $x-1 < 0$, nelygybė galioja taške $x = -1$.

Ats.: $\{-1\} \cup [2; +\infty)$.

Sprendžiant iracionaliąsias nelygybes galima pasinaudoti šiais ekvivalentumo sąryšiais:

- $\sqrt[2n]{f(x)} < \sqrt[2n]{g(x)}$, $n \in N$, $\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ f(x) < g(x); \end{cases}$
- $\sqrt[2n+1]{f(x)} < \sqrt[2n+1]{g(x)}$, $n \in N$, $\Leftrightarrow f(x) < g(x)$;
- $\sqrt[2n+1]{f(x)} < g(x)$, $n \in N$, $\Leftrightarrow f(x) < g^{2n+1}(x)$;
- $\sqrt[2n]{f(x)} > g(x)$, $n \in N$, $\Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) > g^{2n}(x) \end{cases}$ arba $\begin{cases} g(x) < 0, \\ f(x) \geq 0; \end{cases}$
- $\sqrt[2n+1]{f(x)} > g(x)$, $n \in N$, $\Leftrightarrow f(x) > g^{2n+1}(x)$.

8 pavyzdys. Išspręskime nelygybę $\sqrt{x+2} > \sqrt{8-x^2}$.

Sprendimas.

$$\sqrt{x+2} > \sqrt{8-x^2} \Leftrightarrow \begin{cases} 8-x^2 \geq 0, \\ x+2 > 8-x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \leq 8, \\ x^2+x-6>0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2\sqrt{2} \leq x \leq 2\sqrt{2}, \\ x < -3 \text{ arba } x > 2. \end{cases}$$

Ats.: $2 < x \leq 2\sqrt{2}$.

9 pavyzdys. Išspręskime nelygybę $\sqrt{x+5} < 1-x$.

Sprendimas.

$$\sqrt{x+5} < 1-x \Leftrightarrow \begin{cases} x+5 \geq 0, \\ 1-x \geq 0, \\ x+5 < (1-x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -5, \\ x \leq 1, \\ x^2-3x-4>0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -5 \leq x \leq 1, \\ x < -1 \text{ arba } x > 4. \end{cases}$$

Ats.: $x \in [-5; -1)$.

ŠEŠTOJI UŽDUOTIS

1. Įrodykite, kad lygtis $(x+1)(5-x)(\sqrt{x-8}+2)=4$ sprendinių neturi.

Išspręskite lygtis:

2. $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{2x-3}=\sqrt[3]{12(x-1)}$;

3. $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}=1$;

4. $\left(1+\dfrac{9}{x}\right)^{\frac{1}{2}}+4\left(\dfrac{x}{x+9}\right)^{\frac{1}{2}}=4$.

5. Raskite a, b, c reikšmes, su kuriomis lygtis $\sqrt{x+a\sqrt{x}+b}+\sqrt{x}=c$ turi be galo daug sprendinių.

6. Įrodykite, kad nelygybė $\sqrt{\sqrt{x+1}}+\sqrt{\sqrt{x+1}+3}<\sqrt{2\sqrt{x+1}+2}$ sprendinių neturi.

Išspręskite nelygybes:

7. $\sqrt{5x^2+10x+1}\geq 7-x^2-2x$;

8. $\sqrt[3]{\dfrac{3}{x+1}+\dfrac{7}{x+2}}<\sqrt[3]{\dfrac{6}{x-1}}$;

9. $\sqrt{2x-1}+\sqrt{3x-2}<\sqrt{4x-3}+\sqrt{5x-4}$;

10. $\dfrac{\sqrt{2-x}+4x-3}{x}\geq 2.$



VII. TRIGONOMETRINĖS LYGTYS IR NELYGYBĖS

Antanas Apynis ir Eugenijus Stankus
(Vilniaus universitetas)

Pirmiausia siūlytume perskaityti mokyklinių matematikos vadovėlių skyrelius, kuriuose išdėstyta trigonometrija. Čia apsiribosime tik kai kuriais trigonometrinių lygčių bei nelygybių analizės atvejais.

1. TRIGONOMETRINIŲ LYGČIŲ SPRENDIMAS

Prisiminkime, kad sprendžiant bet kurią trigonometrinę lygtį ji pakeičiama viena ar keliomis paprasčiausiomis trigonometrinėmis lygtimis arba įrodoma, kad ji sprendinių neturi. Kai pertvarkant reiškinius laikomasi ekvivalentumo reikalavimų, tai gautųjų sprendinių tikrinti nereikia (nebent norima išvengti apsirikimo klaidų).

Trigonometrinės lygties sprendinių aibė (atsakymas) paprastai užrašoma viena arba keliomis formulėmis. Rašant atsakymą reikėtų išvengti sprendinių pasikartojimo. Pavyzdžiui, gavę kurios nors trigonometrinės lygties sprendinių aibę, išreikštą formulėmis $x=\frac{\pi k}{3}$, $k\in Z$, bei $x=\frac{\pi n}{2}$, $n\in Z$, turėtume pastebėti, kad sprendiniai $x=\pi m$, $m\in Z$, kartojasi – jie gaunami pagal pirmąją formulę, kai $k=3m$ ir pagal antrąją formulę, kai $n=2m$. Pašalinę sprendinius $x=\pi m$, $m\in Z$, iš aibės, užrašytos pirmąja formule, gautume atsakymą $x=\pm\frac{\pi}{3}+\pi k$, $k\in Z$; $x=\frac{\pi n}{2}$, $n\in Z$. Atsisakę bendrųjų sprendinių, gaunamų pagal antrąją formulę, turėtume tokį atsakymą: $x=\frac{\pi}{3}k$, $k\in Z$; $x=\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in Z$. Žinoma, visais trimis atvejais yra užrašyta ta pati sprendinių aibė.

Kartais trigonometrinės lygties sprendinių aibę, užrašytą keliomis formulėmis, nesunku išreikšti viena formule. Pavyzdžiui, sprendinius $x=\pi k$, $k\in Z$, ir $x=\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in Z$ galima užrašyti viena formule

$x = \frac{\pi}{2}m$, $m \in Z$.

Norėtume atkreipti dėmesį, kad nagrinėjant trigonometrinės lygties sprendinių aibę neretai gelbsti sprendinių vaizdavimas abscisių ašies taškais arba vienetinio apskritimo taškais.

Trigonometrinės lygtys dažniausiai sprendžiamos *skaidant dauginamaisiais arba keičiant kintamąjį.*

1 pavyzdys. Išspręskime trigonometrinę lygtį

$$2\cos^2 x - \sin x - 1 = 0.$$

Sprendimas. Kadangi $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, tai gauname ekvivalenčią lygtį $2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$. Šią lygtį galima išspręsti ir skaidant dauginamaisiais, ir keičiant kintamąjį.

A. Reiškinį $2\sin^2 x + \sin x - 1$ išskaidykime dauginamaisiais:

$2\sin^2 x + \sin x - 1 = (\sin^2 x - 1) + (\sin^2 x + \sin x) = (\sin x + 1)(2\sin x - 1)$.

Taigi

$$2\cos^2 x - \sin x - 1 = 0 \Leftrightarrow 2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\sin x + 1)(2\sin x - 1) = 0 \Leftrightarrow \sin x = -1 \text{ arba } \sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z, \text{ arba } x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z.$$

B. Kintamojo keitimo būdu duotąją lygtį sprendžiame taip:

$$2\cos^2 x - \sin x - 1 = 0 \Leftrightarrow 2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = \sin x, \\ 2t^2 + t - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \sin x, \\ t = -1 \text{ arba } t = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin x = -1 \text{ arba } \sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z, \text{ arba } x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z.$$

Ats.: $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in Z$, arba $(-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in Z$.

2 pavyzdys. Išspręskime trigonometrinę lygtį

$$\frac{\sin^3 x + \sin 2x - \sin x}{\sin 3x} = 0.$$

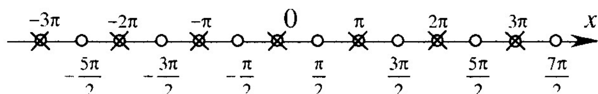
Sprendimas. Taikykime skaidymo dauginamaisiais metodą:

$$\frac{\sin^3 x + \sin 2x - \sin x}{\sin 3x} = 0 \Leftrightarrow \frac{\sin 2x - \sin x(1 - \sin^2 x)}{\sin 3x} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin 2x - \sin x \cdot \cos^2 x}{\sin 3x} = 0 \Leftrightarrow \frac{2\sin 2x - \sin 2x \cdot \cos x}{2\sin 3x} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin 2x(2 - \cos x)}{2\sin 3x} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2x = 0, \\ \sin 3x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi k}{2}, & k \in Z, \\ x \neq \frac{\pi n}{3}, & n \in Z. \end{cases}$$

Lygties sprendinių aibę užrašykime glausčiau. Tuo tikslu taškus $x = \frac{\pi k}{2}$, $k \in Z$ pažymėkime skaičių tiesėje skrituliukais (žr. 1 pav.) ir išbraukime taškus $x = \frac{\pi n}{3}$, $n \in Z$. Nesunku suvokti, kad likusius taškus (lygties sprendinius) galima užrašyti formule $x = \frac{\pi}{2} + \pi m$, $m \in Z$.



1 pav.

Ats.: $\frac{\pi}{2} + \pi m$, $m \in Z$.

Keičiant kintamąjį siekiama gauti kuo paprastesnę lygtį naujojo kintamojo atžvilgiu.

3 pavyzdys. Išspręskime lygtį

$$\sin x + \cos x = 1.$$

Sprendimas. **1.** Iš pradžių aptarkime galimybę pasinaudoti keitiniu $t = \sin x$. Remdamiesi tapatybe $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ gautume $\cos x = \sqrt{1 - t^2}$ arba $\cos x = -\sqrt{1 - t^2}$, priklausomai nuo x. Taigi

turėtume spręsti dvi iracionaliąsias lygtis kintamojo t atžvilgiu: $t+\sqrt{1-t^2}=1$ ir $t-\sqrt{1-t^2}=1$.

Dėl analogiškų sunkumų turėtume atsisakyti ir keitinio $t=\cos x$.

2. Pabandykime pritaikyti keitinį

$$u=\operatorname{tg}\frac{x}{2}, \tag{1}$$

turėdami mintyje, kad jis galioja, kai $x\neq(2k+1)\pi$, $k\in Z$ (kai $\cos\frac{x}{2}\neq 0$). Šis keitinys paprastai vadinamas universaliuoju.

Pasinaudoję žinomomis formulėmis

$$\sin x=\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} \text{ ir } \cos x=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}},$$

gauname sinuso ir kosinuso išraiškas kintamuoju u:

$$\sin x=\frac{2u}{1+u^2},\ \cos x=\frac{1-u^2}{1+u^2}. \tag{2}$$

Kintamojo x reikšmės $x=(2k+1)\pi$, $k\in Z$, netenkina lygties $\sin x+\cos x=1$, todėl visą sprendimą galima užrašyti taip:

$$\sin x+\cos x=1 \Leftrightarrow \begin{cases}\sin x+\cos x=1\\ \cos\frac{x}{2}\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}u=\operatorname{tg}\frac{x}{2},\\ \frac{2u}{1+u^2}+\frac{1-u^2}{1+u^2}=1\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}u=\operatorname{tg}\frac{x}{2},\\ u\,(u-1)=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}u=\operatorname{tg}\frac{x}{2},\\ u=0 \text{ arba } u=1\end{cases} \Leftrightarrow \operatorname{tg}\frac{x}{2}=0 \text{ arba } \operatorname{tg}\frac{x}{2}=1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=2\pi n,\ n\in Z, \text{ arba } x=\frac{\pi}{2}+2\pi m,\ m\in Z.$$

Taigi atsakymas toks: $2\pi n$, $n\in Z$; $\frac{\pi}{2}+2\pi m$, $m\in Z$.

3. Duotąją lygtį suveskime į *homogeninę antrojo laipsnio* lygtį, taikydami pusės argumento sinuso ir kosinuso formules. Sprendimą galima užrašyti taip:

$$\sin x + \cos x = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = = \sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} - 2\sin^2\frac{x}{2} = 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg}\frac{x}{2} - \operatorname{tg}^2\frac{x}{2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}, \\ u - u^2 = 0. \end{cases}$$

Atkreipkime dėmesį, kad universaliojo keitinio taikymas sprendimo pabaigoje visai natūralus.

Žinoma, lygtį

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} - \operatorname{tg}^2\frac{x}{2} = 0$$

galima išspręsti ir be keitinio – išskaidžius dauginamaisiais.

Pastaba. Pavyzdyje nagrinėtą lygtį galima išspręsti ir taip:

$$\sin x + \cos x = 1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin\frac{\pi}{4}\sin x + \cos\frac{\pi}{4}\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in Z \Leftrightarrow x = 2\pi n,\ n \in Z, \text{ arba } x = \frac{\pi}{2} + 2\pi m,\ m \in Z.$$

Čia pritaikėme *papildomo argumento* metodą, kuris labai naudingas sprendžiant sinuso ir kosinuso atžvilgiu tiesines trigonometrines lygtis

$$a\sin x + b\cos x = c \qquad (3)$$

(a, b ir c – kurie nors realieji skaičiai).

Papildomo argumento metodo schema tokia (kai $b \neq 0$):

$$a\sin x + b\cos x = c \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin\varphi, \\ \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos\varphi, \\ \sin\varphi\sin x + \cos\varphi\cos x = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin\varphi, \\ \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos\varphi, \\ \cos(x-\varphi) = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}. \end{cases}$$

Iš čia $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{a}{b}$. Taigi $x = \varphi \pm \arccos\dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} + 2\pi k$, $k \in Z$; $\varphi = \operatorname{arctg}\dfrac{a}{b}$. Jei $b = 0$, tai (3) lygtis iš tikrųjų yra $a\sin x = c$. Jos sprendimas akivaizdus.

Aišku, kad taikant papildomo argumento metodą kampą φ galima rasti ir iš šių sąlygų:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos\varphi \text{ ir } \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin\varphi.$$

Tada $\varphi = \operatorname{arctg}\dfrac{b}{a}$ (kai $a \neq 0$) ir

$$\cos\varphi\sin x + \sin\varphi\cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

t.y. $\sin(x+\varphi) = \dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Vadinasi, (3) lygties sprendinių aibę galima užrašyti formule

$$x = -\operatorname{arctg}\frac{b}{a} + (-1)^n \arcsin\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} + \pi n,\ n \in Z.$$

Gana dažnai tenka spręsti *antrojo laipsnio homogenines trigonometrines lygtis* (jau buvo užsiminta nagrinėjant 3 pavyzdį). Jų bendrasis pavidalas yra

$$a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x = 0 \qquad (4)$$

(a, b, c – kurie nors realieji skaičiai). Kai $a \neq 0$, tai ši lygtis ekvivalenti lygčiai $a\text{tg}^2 x + b\text{tg}x + c = 0$, kurią galima išspręsti pritaikius keitinį $u = \text{tg}x$. Kai $a = 0$, tai (4) lygtis ekvivalenti lygčiai $\cos x(b\sin x + c\cos x) = 0$. Jos sprendimo schema taip pat aiški.

2. TRIGONOMETRINIŲ NELYGYBIŲ SPRENDIMAS.

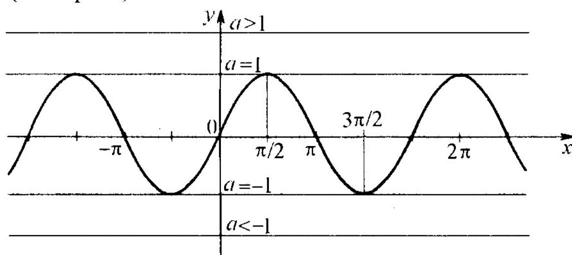
Pirmiausia panagrinėkime paprasčiausių trigonometrinių nelygybių

$f(x) < a$, $f(x) \leq a$, $f(x) > a$, $f(x) \geq a$, $a \in \text{R}$,

sprendimą. Čia $f(x) = \sin x$ arba $f(x) = \cos x$, arba $f(x) = \text{tg}x$, arba $f(x) = \text{ctg}x$. Užrašyti tokių nelygybių sprendinių aibes lengviausia naudojantis trigonometrinių funkcijų grafikais. Išsamiau paanalizuokime porą išvardintųjų nelygybių atvejų.

1 pavyzdys. Išspręskime nelygybę $\sin x < a$.

Sprendimas. Nubrėžkime funkcijos $y = \sin x$ grafiką – sinusoidę ir tiesę $y = a$ (žr. 2 pav.).



2 pav.

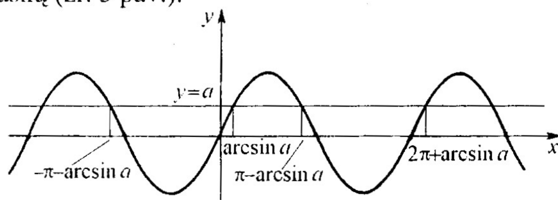
Iš grafiko matome:

1) kai $a > 1$, tai nelygybę $\sin x < a$ tenkina visi realieji skaičiai, t.y. $x \in \text{R}$;

2) kai $a = 1$ (tuomet turime nelygybę $\sin x < 1$), nelygybės sprendinių aibę sudaro visi realieji skaičiai išskyrus $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \text{Z}$;

3) kai $a \leq -1$, nelygybė sprendinių neturi.

Tegu dabar $-1 < a < 1$. Tuomet tiesė $y = a$ kirsis su sinusoide daugelyje taškų (žr. 3 pav.).



3 pav.

Nelygybės $\sin x < a$ sprendinių aibė pavaizduota užtušuotomis realiųjų skaičių tiesės dalimis. Belieka šiuos intervalus užrašyti formulėmis:

$$-\pi - \arcsin a + 2k\pi < x < \arcsin a + 2k\pi,\ k \in Z. \qquad (5)$$

2 pavyzdys. Išspręskime nelygybę $\sin x < \frac{1}{2}$.

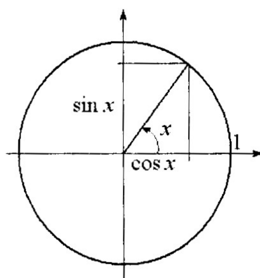
Sprendimas. Pasinaudoję grafiku arba tiesiog (5) formule, galime iš karto užrašyti atsakymą:

$$-\pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in Z,$$

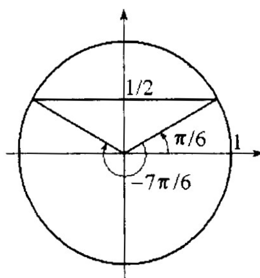
t. y.

$$-\frac{7\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in Z.$$

Pastaba. Sprendžiant trigonometrines nelygybes galima naudotis ir vienetiniu apskritimu. Jame kampo x sinuso reikšmė $\sin x$ sutampa su spindulio projekcija į ordinačių ašį, o $\cos x$ yra šio spindulio projekcija į abscisių ašį (žr. 4 pav.).



4 pav.



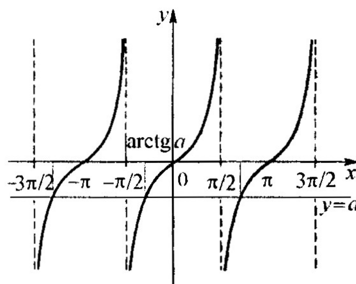
5 pav.

Tuomet visus tokius kampus, su kuriais galioja, pavyzdžiui, nelygybė $\sin x < \frac{1}{2}$, nesunkiai matome iš 5 pav. Taigi $-\frac{7\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{6} + 2k\pi$, $k \in Z$.

3 pavyzdys. Išspręskime nelygybę

$$\operatorname{tg} x \geq a.$$

Sprendimas. Nubrėžkime funkcijų $y = \operatorname{tg} x$ ir $y = a$ grafikus (žr. 6 pav.).



6 pav.

Realiųjų skaičių aibės intervalai, kuriuose $\operatorname{tg} x \geq a$, užtušuoti. Tai intervalai

$$\left[\operatorname{arctg} a + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi\right), \quad k \in Z.$$

Ats.: $\operatorname{arctg} a + k\pi \leq x < \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in Z$.

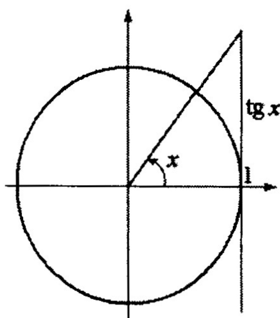
4 pavyzdys. Išspręskime nelygybę

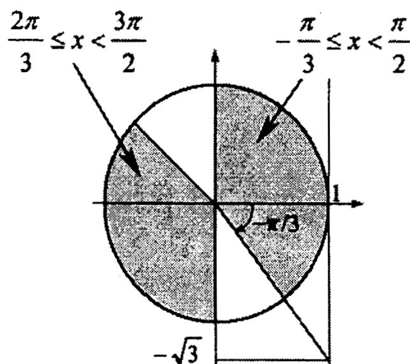
$$\operatorname{tg} x \geq -\sqrt{3}.$$

Sprendimas. Iš grafiko matome, kad intervalai, kuriuose galioja nelygybė yra tokie:

$$-\frac{\pi}{3} + k\pi \leq x < \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in Z.$$

Pastaba. Kampo x tangentą pavaizduokime panaudodami vienetinį apskritimą (žr. 7 pav.).





7 pav.

8 pav.

Tuomet nagrinėtos trigonometrinės nelygybės $\text{tg}x \ge -\sqrt{3}$ sprendinių aibė vaizduojama užbrūkšniuotomis sritimis (žr. 8 pav.).

5 pavyzdys. Išspręskime nelygybę $\cos 3x \ge \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Sprendimas. Pažymėkime $t = 3x$ ir pirmiau išspręskime nelygybę $\cos t \ge \frac{\sqrt{3}}{2}$. Gausime $-\frac{\pi}{6} + 2k\pi \le t \le \frac{\pi}{6} + 2k\pi$, $k \in Z$. Tada

$$-\frac{\pi}{6} + 2k\pi \le 3x \le \frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in Z;$$

$$-\frac{\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3} \le x \le \frac{\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3},\ k \in Z.$$

Sudėtingesnės trigonometrinės nelygybės sprendžiamos pertvarkant jas į paprasčiausias trigonometrines nelygybes ar jų sistemas.

6 pavyzdys. Išspręskime nelygybę

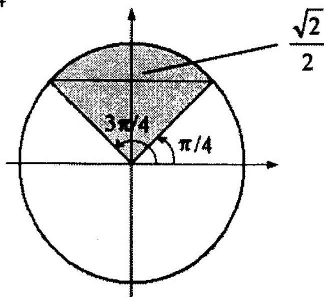
$$1 - \sin x + \cos x < 0.$$

Sprendimas.

$$1 - \sin x + \cos x < 0 \Leftrightarrow \sin x - \cos x > 1 \Leftrightarrow \sin x - \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) > 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\cos\frac{\pi}{4} > 1 \Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) > \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Pažymėję $t = x - \frac{\pi}{4}$, gauname nelygybę $\sin t > \frac{\sqrt{2}}{2}$.



9 pav.

Remdamiesi brėžiniu (žr. 9 pav.) nustatome, kad

$$\frac{\pi}{4} + 2k\pi < t < \frac{3\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in Z.$$

Įrašę $t = x - \frac{\pi}{4}$, gauname:

$$\frac{\pi}{4} + 2k\pi < x - \frac{\pi}{4} < \frac{3\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in Z;$$

$$\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \pi + 2k\pi,\ k \in Z.$$

7 pavyzdys. Išspręskime nelygybę

$$2\cos^2 x - 3\sin x > 0.$$

Sprendimas. Pertvarkę nelygybę, gauname

$$2\sin^2 x + 3\sin x - 2 < 0.$$

Pažymėkime $u = \sin x$ ir spręskime kvadratinę nelygybę:

$$2u^2 + 3u - 2 < 0 \Leftrightarrow 2\left(u - \frac{1}{2}\right)(u + 2) < 0 \Leftrightarrow -2 < u < \frac{1}{2}.$$

Taigi turime išspręsti nelygybių sistemą

$$\begin{cases} \sin x < \frac{1}{2}, \\ \sin x > -2. \end{cases}$$

Antrosios nelygybės sprendinių aibė – visa realiųjų skaičių tiesė, o pirmosios – intervalai

$$\left(-\frac{7\pi}{6}+2k\pi;\ \frac{\pi}{6}+2k\pi\right),\ k\in Z.$$

Taigi $-\frac{7\pi}{6}+2k\pi < x < \frac{\pi}{6}+2k\pi$, $k\in Z$.

SEPTINTOJI UŽDUOTIS

Išspręskite šias trigonometrines lygtis:

1. $3\sin^2 2x + 7\cos 2x = 3$;

2. $\sin 4x\cdot\cos x\cdot \mathrm{tg}2x = 0$;

3. $\dfrac{2\sin^2 x - 3\sin x + 1}{\cos^2 x - \cos x} = 0$;

4. $\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right) = 1+\cos 2x$;

5. $\sin\left(\frac{3\pi}{5}+x\right) = 2\sin\left(\frac{\pi}{5}-\frac{x}{2}\right)$.

Išspręskite šias trigonometrines nelygybes:

6. $|\sin x| > |\cos x|$;

7. $4\cos x - \sin 2x > 0$;

8. $\sqrt{2\sin x} < 1$;

9. $\cos^2 x + \sin x\cos x \geq 1$;

10. $|\sin x|\cos x > \frac{1}{4}$.



VIII. SEKOS

Gediminas Stepanauskas
(Vilniaus universitetas)

1. *Skaičių seką* mes suprantame kaip sunumeruotus skaičius

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$$

Indeksas n žymi nario a_n vietą sekoje. Taigi a_1 yra pirmasis sekos narys, a_2 – antrasis sekos narys, a_n – n-tasis arba *bendrasis sekos narys*. Sekos, turinčios baigtinį skaičių narių, vadinamos *baigtinėmis sekomis*. Vienaženklių lyginių natūraliųjų skaičių seka $2, 4, 6, 8$ turi keturis narius ir yra baigtinė. Įdomesnės yra *begalinės sekos*. Dažnai seka ir suprantama kaip begalinė seka.

2. Sekos gali būti apibrėžiamos labai įvairiai. Vienas iš būdų nusakyti seką yra jos n-tojo nario, kaip natūraliojo argumento funkcijos, apibrėžimas. Sekos, kurios n-tasis narys $a_n = n^2$, pirmieji penki nariai yra lygūs 1, 4, 9, 16, 25, o dešimtasis narys yra lygus 100.

Tačiau, jei parašyti keli pirmieji sekos nariai, nėra jokios galimybės užrašyti sekos n-tojo nario formulės. Pavyzdžiui, sekos

$$2, 4, 6, 8, 10, \dots$$

n-tasis narys galėtų būti $2n$, bet jis galėtų būti taip pat ir toks:

$$2n + (n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5), \qquad (1)$$

arba net

$$2n + (n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)f(n). \qquad (2)$$

Čia $f(n)$ galėtų būti bet kokia natūraliojo argumento n funkcija. Taigi į klausimą „Koks yra šeštas sekos $2, 4, 6, 8, 10, \dots$ narys?" negali būti logiškai atsakyta. Jis galėtų būti lygus 12, bet jeigu taikytume (1) formulę, jis būtų lygus 132. Iš tikrųjų šeštasis šios sekos narys, tinkamai parinkus (2) formulėje funkciją $f(n)$, galėtų būti bet koks skaičius.

3. Rekurenčiosios sekos. Panagrinėkime pavyzdį.

1 pavyzdys. Tegul sekos $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ nariai yra susieti lygybe

$$a_n = 3a_{n-1} - a_{n-2}, \qquad (3)$$

teisinga visiems natūraliesiems $n > 2$. Be to, tegul $a_1 = 0$, $a_2 = 1$.

Iš (3) formulės, kai $n=3$, gausime $a_3 = 3a_2 - a_1 = 3$, o kai $n = 4$, tai $a_4 = 3a_3 - a_2 = 8$ ir t. t. Taip skaičiuodami galime surasti bet kurį konkretų sekos narį.

Sekos, kurių n-tasis narys yra kokia nors prieš jį einančių narių funkcija, vadinamos *rekurenčiosiomis sekomis*. Rekurenčiosios sekos apibrėžime slypi indukcinė idėja. Žinodami keletą pirmųjų sekos narių ir n-tojo sekos nario ryšį su prieš jį einančiais nariais (rekurentinę formulę) galime surasti norimą sekos narį.

Rekurentinės formulės ypač patogios skaičiavimuose, kuriuose naudojami kompiuteriai.

4. Monotoninės sekos. Skaičių seka $a_1, a_2, a_3, \ldots$ vadinama *monotoniškai didėjančia*, jei visiems n

$$a_{n+1} > a_n,$$

monotoniškai mažėjančia, jei visiems n

$$a_{n+1} < a_n.$$

Seka vadinama *monotoniškai nedidėjančia*, atitinkamai *monotoniškai nemažėjančia*, jei visiems n

$$a_{n+1} \leq a_n,$$

atitinkamai

$$a_{n+1} \geq a_n.$$

Visos šios keturių rūšių sekos vadinamos tiesiog *monotoninėmis sekomis*. Jos yra svarbios ribų teorijoje ir pasižymi ypatingomis savybėmis.

2 pavyzdys. Įrodysime, kad seka, kurios bendrasis narys

$$a_n = \left(\frac{a^2+1}{2a}\right)^n, \quad a > 0,\ a \neq 1,$$

yra monotoniškai didėjanti.

Tirkime gretimų narių santykį

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\left(\frac{a^2+1}{2a}\right)^{n+1}}{\left(\frac{a^2+1}{2a}\right)^n} = \frac{a^2+1}{2a}. \tag{4}$$

Pasinaudodami akivaizdžia nelygybe

$$(a-1)^2 > 0\text{, kai } a \neq 1,$$

turėsime, kad

$$a^2 - 2a + 1 > 0$$

arba

$$a^2 + 1 > 2a.$$

Pastarąją nelygybę padalinę iš $2a$ $(a > 0)$, gausime

$$\frac{a^2+1}{2a} > 1.$$

Dabar iš (4) lygybės išplaukia, kad

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$$

arba

$$a_{n+1} > a_n,$$

nes $a_n > 0$. Taigi seka $a_1, a_2, \ldots$ yra monotoniškai didėjanti.

Labai svarbios sekos yra progresijos. Jas toliau ir nagrinėsime.

5. Aritmetinė progresija. Skaičių seka $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ vadinama *aritmetine progresija*, jei visiems n

$$a_{n+1} = a_n + d.$$

Čia d yra pastovus skaičius ir vadinamas *progresijos skirtumu.*

6. Geometrinė progresija. Skaičių seka $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ vadinama *geometrine progresija*, jei visiems n

$$a_{n+1} = a_n q.$$

Čia q yra nelygus nuliui pastovus skaičius. Jis vadinamas *progresijos vardikliu.*

Aritmetinių ir geometrinių progresijų savybės moksleiviams turėtų būti gana gerai žinomos, todėl jų detaliau čia nenagrinėsime. Plačiau susipažinsime su bendresnėmis aritmetinėmis progresijomis.

7. Sekos *r*-tieji skirtumai. Nagrinėkime skaičių seką

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, a_{n+1}, \ldots \tag{5}$$

Pažymėję

$$\Delta a_n = a_{n+1} - a_n, \ n = 1, 2, \ldots, \tag{6}$$

turėsime naują seką

$$\Delta a_1, \Delta a_2, \Delta a_3, \dots, \Delta a_n, \Delta a_{n+1}, \dots \qquad (7)$$

Šios sekos nariai vadinami pradinės (5) sekos *pirmosios eilės* arba *pirmaisiais skirtumais*. Jeigu pažymėsime

$$\Delta^2 a_n = \Delta a_{n+1} - \Delta a_n, \ n = 1, 2, \dots, \qquad (8)$$

tai gausime dar vieną seką

$$\Delta^2 a_1, \Delta^2 a_2, \Delta^2 a_3, \dots, \Delta^2 a_n, \Delta^2 a_{n+1}, \dots \qquad (9)$$

Pastarosios sekos nariai vadinami (5) sekos *antrosios eilės* arba *antraisiais skirtumais*. Apskritai *r-tosios eilės* arba *r-taisiais* pradinės (5) sekos *skirtumais* vadinami $r-1$-osios eilės skirtumų pirmosios eilės skirtumai. Taigi

$$\begin{aligned}
&\Delta^r a_1 = \Delta^{r-1} a_2 - \Delta^{r-1} a_1, \\
&\Delta^r a_2 = \Delta^{r-1} a_3 - \Delta^{r-1} a_2, \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \qquad (10) \\
&\Delta^r a_n = \Delta^{r-1} a_{n+1} - \Delta^{r-1} a_n, \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\
&r = 2, 3, 4, \dots
\end{aligned}$$

3 pavyzdys. Sekos

$$1, 8, 27, 64, 125, \dots, n^3, \dots$$

pirmieji skirtumai yra tokie:

$$7, 19, 37, 61, \dots, (n+1)^3 - n^3 = 3n^2 + 3n + 1, \dots ;$$

antrieji skirtumai:

$$12, 18, 24, \dots, 3(n+1)^2 + 3(n+1) + 1 - (3n^2 + 3n + 1) = 6n + 6, \dots ;$$

tretieji skirtumai:

$$6, 6, \dots, 6\,(n+1) + 6 - (6n+6) = 6, \dots ;$$

aukštesnių eilių skirtumai:

$$0, 0, \dots, 0, \dots$$

Gana paprastai iš (6), (8) ir (10) gauname, kad

$$a_2 = a_1 + \Delta a_1,$$

$$a_3 = a_2 + \Delta a_2 = (a_1 + \Delta a_1) + (\Delta a_1 + \Delta^2 a_1) = a_1 + 2\Delta a_1 + \Delta^2 a_1,$$

$$a_4 = a_1 + 3\Delta a_1 + 3\Delta^2 a_1 + \Delta^3 a_1$$

ir t. t. Be įrodymo (galima įrodyti matematinės indukcijos būdu) pateiksime $n+1$-ojo (5) sekos nario išraišką per skirtumų sekų pirmuosius narius:

$$a_{n+1} = a_1 + C_n^1\Delta\, a_1 + C_n^2\Delta^2 a_1 + C_n^3\Delta^3 a_1 + \ldots + C_n^{n-1}\Delta^{n-1} a_1 + \Delta^n a_1. \quad (11)$$

Čia koeficientai C_n^k yra Niutono binomo koeficientai. Jie skaičiuojami taikant formulę

$$C_n^k = \frac{n\,(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}.$$

Su (5) seka susiekime kitą seką, (5) sekos pirmųjų n narių sumų seką:

$$S_0,\, S_1,\, S_2,\, \ldots,\, S_{n-1},\, S_n,\, \ldots \quad (12)$$

Čia $S_0 = 0$ (pridėtas dėl patogumo), $S_1 = a_1$, $S_2 = a_1 + a_2$, ..., $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, ... Šios sekos pirmieji skirtumai bus (5) sekos nariai:

$$\Delta\, S_0 = a_1,\ \Delta\, S_1 = a_2,\ \ldots,\ \Delta\, S_n = a_n,\ \ldots$$

Aišku, kad (12) sekos r-tieji skirtumai bus (5) sekos $r-1$-aisiais skirtumais. Taikydami (11) formulę (12) sekai, galime užrašyti

$$S_n = S_0 + C_n^1\Delta\, S_0 + C_n^2\Delta^2 S_0 + C_n^3\Delta^3 S_0 + \ldots + C_n^{n-1}\Delta^{n-1} S_0 + \Delta^n S_0 =$$

$$= C_n^1\, a_1 + C_n^2\Delta a_1 + C_n^3\Delta^2 a_1 + \ldots + C_n^{n-1}\Delta^{n-2} a_1 + \Delta^{n-1} a_1. \quad (13)$$

Gautoji formulė gali būti pritaikyta sekų pirmiesiems n nariams susumuoti. Mes ją pritaikysime specialioms sekoms, r-tos eilės aritmetinėms progresijoms. Matematikoje r-tieji sekų skirtumai plačiai taikomi apytiksliame skaičiavime.

8. r-tosios eilės aritmetinės progresijos. Seka, kurios visi r-tieji skirtumai yra lygūs, ir tai nėra teisinga mažesnės eilės skirtumams, vadinama *r-tosios eilės aritmetine progresija*. Taigi pirmosios eilės aritmetinė progresija yra tai, ką mes formaliai vadiname aritmetine progresija. 3 pavyzdyje išnagrinėta kubų seka yra trečios eilės aritmetinė progresija. r-tosios eilės aritmetinės progresijos $r+1$-ieji ir aukštesnieji skirtumai yra lygūs nuliui. Todėl tokios progresijos pirmųjų n narių sumos (13) formulė yra užrašoma taip:

$$S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2!}\Delta a_1 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\Delta^2 a_1 + \ldots + \\ + \frac{n(n-1)\ldots(n-r)}{(r+1)!}\Delta^r a_1. \qquad (14)$$

4 pavyzdys. Raskime 3 pavyzdyje nagrinėtos kubų sekos pirmųjų n narių sumą.

Kadangi kubų seka yra trečiosios eilės aritmetinė progresija, tai paėmę (14) formulėje $r = 3$, turėsime

$$S_n = 1 + 8 + 27 + 64 + 125 + \ldots + n^3 =$$

$$= n + \frac{n(n-1)}{2}7 + \frac{n(n-1)(n-2)}{6}12 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}6 =$$

$$= \frac{n^4 + 2n^3 + n^2}{4} = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

5 pavyzdys. Raskime sekos

$$2, 6, 12, 20, \ldots, n(n+1), \ldots$$

pirmųjų n narių sumą.

Šios sekos pirmieji skirtumai:

$$4, 6, 8, \ldots, (n+1)(n+2) - n(n+1) = 2n + 2, \ldots;$$

antrieji skirtumai:

$$2, 2, \ldots, 2(n+1) + 2 - (2n+2) = 2, \ldots$$

Taigi turime antrosios eilės aritmetinę progresiją. Iš (14) formulės randame

$$S_n = 2 + 6 + 12 + \ldots + n(n+1) =$$

$$= n \cdot 2 + \frac{n(n-1)}{2} \cdot 4 + \frac{n(n-1)(n-2)}{6} \cdot 2 = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

AŠTUNTOJI UŽDUOTIS

1. Sugalvokite bent dvi skirtingas sekas (užrašykite bendrojo sekos nario formules), kurių pirmieji trys nariai yra 1, 3, 7.

2. Tegul sekos $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ nariai tenkina rekurentinį sąryšį

$$a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} + a_{n-3}, \quad n = 4, 5, \ldots.$$

Be to, tegul $a_3 = 1$, $a_5 = 1$, $a_6 = 0$. Raskite pirmąjį sekos narį a_1.

3. Įrodykite, kad seka, kurios bendrasis narys
$$a_n = \frac{2n+3}{6n-5},$$
yra monotoniškai mažėjanti.

4. Kokią sąlygą turi tenkinti teigiami skaičiai a, b, c ir d, kad seka, kurios bendrasis narys
$$a_n = \frac{an+b}{cn+d},$$
būtų monotoniškai didėjanti?

5. Sekos pirmųjų n narių suma užrašoma formule $S_n = 2n^2 + 3n$, teisinga visiems $n \geq 1$.
1. Raskite dešimtąjį šios sekos narį.
2. Įrodykite, kad ši seka yra aritmetinė progresija.

6. Tegu $P_1 = \sqrt{x}$, $P_2 = \sqrt[3]{x}$, $P_3 = \sqrt[4]{x}$.
1. Kokia turi būti x reikšmė, kad skaičiai P_1, P_2, P_3 sudarytų aritmetinę progresiją?
2. Kokia turi būti x reikšmė, kad skaičiai P_1, P_2, P_3 sudarytų geometrinę progresiją?
3. Kokia turi būti x reikšmė, kad skaičiai P_1, P_2, P_3 sudarytų sudarytų kartu ir aritmetinę, ir geometrinę progresiją?

7. Lygiašonio trikampio ABC ($AC = BC$) kampas prie pagrindo $\angle ABC = 75^\circ$, o šoninė kraštinė $AC = a$. Kraštinėje BC pažymėti taškai D_1, D_3, D_5, ... , D_{2n-1}, ... , o kraštinėje AC taškai D_2, D_4, D_6, ... , D_{2n}, ... taip, kad atkarpos AD_1, D_2D_3, D_4D_5, $D_{2n-2}D_{2n-1}$, ... yra statmenos kraštinei BC, o atkarpos D_1D_2, D_3D_4, D_5D_6, ... , $D_{2n-1}D_{2n}$, ... yra statmenos kraštinei AC. Raskite:

a) laužtės $AD_1D_2D_3$ ilgį;

b) laužtės $AD_1D_2...D_n$ ilgį;

c) begalinės laužtės $AD_1D_2...D_n...$ ilgį.

8. 1. Ar galima iš skaičių $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots, \frac{1}{2^n}, \ldots$ išrinkti tokius, kad jie sudarytų begalinę geometrinę progresiją, kurios suma lygi $\frac{1}{5}$?

2. Ar galima iš skaičių $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots, \frac{1}{2^n}, \ldots$ išrinkti tokius, kad jie sudarytų begalinę geometrinę progresiją, kurios suma lygi $\frac{1}{15}$?

9. Raskite sumą

$$4 + 14 + 36 + \ldots + n(n^2 + 3).$$

10. Rutuliai dedami sluoksniais vieni ant kitų taip, kad gautas kūnas yra taisyklingos trikampės piramidės formos. Paskutiniame sluoksnyje (viršūnėje) yra vienas rutulys, priešpaskutiniame – trys rutuliai, dar žemiau – 6 rutuliai ir t.t. Kiek iš viso rutulių reikės pastatyti tokiai piramidei:

a) kuri turi 18 sluoksnių;

b) kuri turi n sluoksnių?



BAIGIAMOJI UŽDUOTIS

Antanas Apynis, Eugenijus Stankus (Vilniaus universitetas),
Juozas Šinkūnas (Vilniaus pedagoginis universitetas)

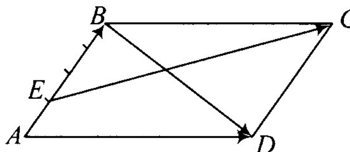
1. Kokias liekanas galima gauti skaičių n^2 (n – natūralusis skaičius) dalijant iš 5?

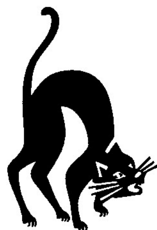
2. Išspręskite nelygybę $\sqrt{x} \le x - 2$.

3. Į lygiašonį trikampį ABC ($AC=BC$) įbrėžto apskritimo centras aukštinę CD dalija į dvi 5 cm ir 3 cm ilgio dalis imant nuo viršūnės. Raskite trikampio ABC plotą.

4. Raskite lygties $3\cos 2x - 11\cos x + 7 = 0$ sprendinį, priklausantį intervalui $[\pi; 2\pi]$.

5. Brėžinyje pavaizduotas lygiagretainis $ABCD$. Taškas E kraštinę AB dalija santykiu 1:3. Apskaičiuokite vektorių $\overrightarrow{EC}$ ir $\overrightarrow{BD}$ skaliarinę sandaugą, jeigu $|\overrightarrow{AB}| = 4$, $|\overrightarrow{AD}| = 5$, kampas tarp $\overrightarrow{AB}$ ir $\overrightarrow{AD}$ lygus 60^0.





Užduočių sprendimai



STOJAMOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

1. *Ats.* 3.

2. Sakykime, S – atstumas (km) tarp miestų A ir B, o t – motociklininko kelionės laikas (h). Tuomet $t+2$ – dviratininko kelionės laikas.

   Per 45 minutes motociklininkas nuvažiavo $\frac{3}{4}\cdot\frac{S}{t}$ km, o dviratininkas – $\frac{3}{4}\cdot\frac{S}{t+2}$ km. Sudarome lygtį

$$S=\frac{3}{4}\cdot\frac{S}{t}+\frac{3}{4}\cdot\frac{S}{t+2}.$$

   Kadangi $S>0$, tai ši lygtis ekvivalenti lygčiai $\frac{1}{t}+\frac{1}{t+2}=\frac{4}{3}$. Ją išsprendę randame: $t_1=1$, Antroji šaknis netinka pagal kintamojo t prasmę. Taigi motociklininkas kelionėje užtruko 1 h.

   Ats.: 1 h.

3. *Ats.* $[-4;-1)\cup(-1;2]$.

4. Įrodomąją nelygybę padauginkime iš 2:

   $2a^2+2b^2+2\geq 2ab+2a+2b$ ir pertvarkykime šitaip:

$$a^2-2ab+b^2+a^2-2a+1+b^2-2b+1\geq 0,$$

   t. y.

$$(a-b)^2+(a-1)^2+(b-1)^2\geq 0.$$

   Ši nelygybė, todėl ir įrodomoji, teisinga su visomis a ir b reikšmėmis. Kai $a=b=1$, gauname lygybę.

5. Šie skaičiai turi dalytis iš 4 ir 9. Skaičius dalijasi iš 4, jeigu du jo paskutiniai skaitmenys sudaro skaičių, kuris dalijasi iš 4. Vadinasi, y gali būti arba 2, arba 6. Skaičius dalijasi iš 9, jeigu jo skaitmenų suma dalijasi iš 9. Taip yra tik tuomet, kai: 1) $y=2$, $x=4$; 2) $y=6$, $x=0$; 3) $y=6$, $x=9$. Taigi tik trys skaičiai 34452, 34056, 34956 dalijasi iš 36.

   Ats.: 34452, 34056, 34956.

6. *1 būdas.* Tarkime, kad trupmena suprastinama. Tuomet yra toks natūralusis skaičius r, $r \neq 1$, ir tokie sveikieji skaičiai q ir p, su kuriais galioja lygybės $5x+7=qr$, $2x+3=pr$. Eliminavę x, gauname $\frac{1}{r}=5p-2q$. Kairėje pusėje yra trupmena, o dešinėje – sveikasis skaičius. Lygybė negalima, todėl prielaida neteisinga. Taigi trupmena nesuprastinama.

2 būdas. Tarus, kad trupmena $\frac{2x+3}{5x+7}$ suprastinama, būtų suprastinama ir trupmena $\frac{5x+7}{2x+3}=2+\frac{x+1}{2x+3}$. Tuomet turėtų būti suprastinama ir trupmena $\frac{2x+3}{x+1}=2+\frac{1}{x+1}$. Tačiau trupmena $\frac{1}{x+1}$ – nesuprastinama, kai $x \in Z$, $x \neq -1$. Taigi trupmena $\frac{2x+3}{5x+7}$, $x \neq -1$ – nesuprastinama. Kai $x=-1$, duotoji trupmena, aišku, nesuprastinama.

7. Remdamiesi formulėmis $\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}$, $\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}$ duotąjį reiškinį (pažymėkime jį I) pertvarkome taip:

$$I=\left(\frac{1-\cos\frac{\pi}{8}}{2}\right)^2+\left(\frac{1-\cos\frac{3\pi}{8}}{2}\right)^2+\left(\frac{1-\cos\frac{5\pi}{8}}{2}\right)^2+\left(\frac{1-\cos\frac{7\pi}{8}}{2}\right)^2=$$

$$=1-\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{8}+\cos\frac{3\pi}{8}+\cos\frac{5\pi}{8}+\cos\frac{7\pi}{8}\right)+$$

$$+\frac{1}{4}\left(\frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2}+\frac{1+\cos\frac{3\pi}{4}}{2}+\frac{1+\cos\frac{5\pi}{4}}{2}+\frac{1+\cos\frac{7\pi}{4}}{2}\right)=$$

$$=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{8}+\cos\frac{3\pi}{8}+\cos\frac{5\pi}{8}+\cos\frac{7\pi}{8}\right)+$$

$$+\frac{1}{8}\left(\cos\frac{\pi}{4}+\cos\frac{3\pi}{4}+\cos\frac{5\pi}{4}+\cos\frac{7\pi}{4}\right)=\frac{3}{2},$$

nes $\cos\frac{\pi}{8}+\cos\frac{3\pi}{8}+\cos\frac{5\pi}{8}+\cos\frac{7\pi}{8}=0$

$\left(\cos\frac{7\pi}{8}=-\cos\frac{\pi}{8},\ \cos\frac{5\pi}{8}=-\cos\frac{3\pi}{8}\right)$ ir

$\cos\frac{\pi}{4}+\cos\frac{3\pi}{4}+\cos\frac{5\pi}{4}+\cos\frac{7\pi}{4}=0$.

Ats.: $\frac{3}{2}$.

8. $P(1)$ yra visų daugianario koeficientų suma, o $P(-1)$ yra koeficientų sumos prie x lyginių laipsnių ir koeficientų sumos prie nelyginių x laipsnių skirtumas. Sakykime, a – koeficientų prie lyginių x laipsnių suma, o b – koeficientų prie nelyginių x laipsnių suma. Tuomet

$$\begin{cases} a+b=P(1), \\ a-b=P(-1). \end{cases}$$

Iš čia $b=\frac{P(1)-P(-1)}{2}$. Kadangi

$$P(1)=(1^2+2+2)^7+(1^2-3-3)^7=5^7+(-5)^7=0,$$

$$P(-1)=[(-1)^2-2+2]^7+[(-1)^2+3-3]^7=1^7+1^7=2,$$

tai $b=\frac{0-2}{2}=-1$.

Ats.: -1.

9. Pirmąją sistemos lygtį padauginę iš (-1) ir sudėję su antrąja lygtimi, gauname sistemą

$$\begin{cases} x^2-4y^2-xy+5y=1, \\ 7y^2-9y=-2, \end{cases}$$

kuri ekvivalenti duotajai.

Iš antrosios lygties randame:

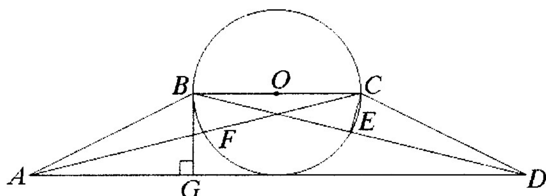
$$y_1 = \frac{2}{7},\ y_2 = 1.$$

Kai $y = y_1 = \frac{2}{7}$, iš pirmosios lygties gauname lygtį $49x^2 - 14x + 5 = 0$, kuri neturi sprendinių.

Kai $y = y_2 = 1$, gauname lygtį $x^2 - x = 0$, kurios sprendiniai yra $x_1 = 0$, $x_2 = 1$. Vadinasi, duotosios sistemos sprendiniai yra $(0; 1)$ ir $(1; 1)$.

Ats.: (0; 1), (1; 1).

10. Atkarpa CE yra trikampio BCD pusiaukraštinė. Kadangi $\angle BEC = 90°$ (kampas įbrėžtas į apskritimą ir remiasi į skersmenį), tai CE – trikampio BCD aukštinė. Taigi trikampis



BCD yra lygiašonis: $BC = CD$. Analogiškai įsitikiname, kad $AB = BC$. Vadinasi, trapecija yra lygiašonė. Kadangi trapecijos aukštinė BG lygi $\frac{1}{2}BC$ arba $\frac{1}{2}AB$, tai stačiajame trikampyje AGB turėsime: $\angle BAG = 30°$, $\angle ABG = 60°$. Tuomet $\angle ABC = 60° + 90° = 150°$, Taigi trapecijos kampai yra: $\angle BAD = \angle CDA = 30°$, $\angle ABC = \angle BCD = 150°$.

Ats.: $30°$, $150°$, $150°$, $30°$.

PIRMOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

1. Tarkime $a_2, \dots, a_m$ ir $b_1, b_2, \dots, b_n$ dalijasi iš a, t.y.

$$a_2 = aq_2, \dots, a_m = aq_m, \; b_1 = al_1, b_2 = al_2, \dots, b_n = al_n.$$

Tuomet ir a_1 dalijasi iš a. Iš tikrųjų, iš lygybės

$$a_1 + aq_2 + \dots + aq_m = al_1 + alb_2 + \dots + al_n$$

išreiškę a_1, gauname:

$$a_1 = a(l_1 + l_2 + \dots + l_n - q_2 - \dots - q_m) = aq.$$

2. Kadangi $3663 = 3^2 \cdot 11 \cdot 37$, o $1443 = 3 \cdot 13 \cdot 37$, tai šių skaičių didžiausias bendras daliklis $d = 3 \cdot 37 = 111$.

3. Iš dviejų paeiliui einančių sveikųjų skaičių vienas yra lyginis, kitas – nelyginis. Taigi tarp trijų skaičių n, $n+1$ ir $n+2$ $(n \in Z)$ mažiausiai vienas yra lyginis. Vadinasi, sandauga $n(n+1)(n+2)$ dalijasi iš 2.

Iš trijų paeiliui einančių sveikųjų skaičių n, $n+1$ ir $n+2$ vienas dalijasi iš 3, kito liekana dalijant iš 3 lygi 1, o trečiojo liekana dalijant iš 3 lygi 2 (žr. 1 pavyzdį iš skyrelio „Skaičių dalumas"). Taigi sandauga $n(n+1)(n+2)$, kai $n \in Z$, dalijasi iš 3.

Kadangi skaičius $n(n+1)(n+2)$ $(n \in Z)$ dalijasi ir iš 2, ir iš 3, tai jis dalijasi iš 6.

Skaičiaus $n(n+1)(n+2)$ dalumą iš 6 galima įrodyti ir taikant matematinės indukcijos metodą.

Su $n = 1$ skaičius $n(n+1)(n+2) = 6$ dalijasi iš 6. Tarkime, kad $k(k+1)(k+2)$ dalijasi iš 6. Įrodysime, kad $k(k+1)(k+2)(k+3)$ dalijasi iš 6. Iš tikrųjų pertvarkę reiškinį taip

$$k(k+1)(k+2)(k+3) = k(k+1)(k+2) + 3(k+1)(k+2),$$

gausime, kad abu pastarosios sumos dėmenys, taigi ir pati suma, dalijasi iš 6 (pirmasis dėmuo pagal prielaidą, o antrasis yra dviejų paeiliui einančių natūraliųjų skaičių sandauga, padauginta iš 3).

Pagal matematinės indukcijos principą skaičius
$n(n+1)(n+2)$ su visais $n \in N$ dalijasi iš 6.

Įrodant šį teiginį sveikųjų skaičių aibėje, atkreipkime dėmesį, kad teiginys akivaizdus su $n=0$, $n=-1$ ir $n=-2$. Kai $n \leq -3$, vėl taikykime matematinės indukcijos metodą. Tuo tikslu pažymėkime

$$A(n)=(-n-2)(-n-1)(-n),\ n=1,2,\ldots.$$

Su $n=1$ skaičius $A(1)=(-3)\cdot(-2)\cdot(-1)=-6$ dalijasi iš 6. Tarkime, kad $A(k)=(-k-2)(-k-1)(-k)$ dalijasi iš 6. Įrodysime, jog skaičius $A(k+1)=(-k-3)(-k-2)(-k-1)$ dalijasi iš 6. Pertvarkykime reiškinį:

$$A(k+1)=(-k-2)(-k-1)(-k)-3(-k-2)(-k-1).$$

Abu šio skirtumo dėmenys dalijasi iš 6, taigi $A(k+1)$ dalijasi iš 6. Vadinasi, pagal matematinės indukcijos principą skaičius $A(n)$ su visais $n=1,2,\ldots.$ dalijasi iš 6, taigi $n(n+1)(n+2)$ su $n \leq -3$ dalijasi iš 6.

Sujungę išvadas, gauname: $n(n+1)(n+2)$ dalijasi iš 6 su visais $n \in \mathrm{Z}$.

4. Teiginys įrodomas matematinės indukcijos metodu. Kai $n=1$, gauname $7 \mid 721$ (teisinga).

Tegu $7 \mid k^7+720k$. Įrodysime, jog

$$7 \mid ((k+1)^7+720(k+1)).$$

Iš tikrųjų:

$(k+1)^7+720(k+1)=$

$=k^7+7k^6+21k^5+35k^4+35k^3+21k^2+7k+1+720k+720=$

$=k^7+720k+7(k^6+3k^5+5k^4+7k^3+3k^2+k+103).$

Pagal matematinės indukcijos principą darome išvadą:

$$7 \mid n^7+720n,\ \text{kai}\ n \in \mathrm{N}.$$

5. Taikome matematinės indukcijos metodą. Pažymėkime

$$A(n)=a^{2n+1}+(a-1)^{n+2}.$$

Kai $n=1$, turėsime:

$$(a^2-a+1) \mid (a^3+(a-1)^3).$$

Tai teisinga, nes

$$a^3 + (a-1)^3 = a^3 + a^3 - 3a^2 + 3a - 1 = 2a^3 - 3a^2 + 3a - 1 =$$
$$= (a^2 - a + 1) \cdot (2a - 1).$$

Tarkime, kad teiginys galioja, kai $n = k$, t.y.

$$(a^2 - a + 1) \mid (a^{2k+1} + (a-1)^{k+2}).$$

Įrodysime, jog

$$(a^2 - a + 1) \mid (a^{2k+3} + (a-1)^{k+3}).$$

Tuo tikslu pertvarkysime reiškinį:

$$A(k+1) = a^{2k+3} + (a-1)^{k+3} =$$
$$= a^{2k+3} - a^{2k+1}(a-1) + a^{2k+1}(a-1) + (a-1)^{k+3} =$$
$$= a^{2k+1} \cdot (a^2 - a + 1) + (a-1) \cdot (a^{2k+1} + (a-1)^{k+2}).$$

Kadangi reiškinio $A(k+1)$ abu dėmenys dalijasi iš $a^2 - a + 1$, tai $A(k+1)$ dalijasi iš $a^2 - a + 1$. Darome išvadą:

$$(a^2 - a + 1) \mid A(n)$$

su visais $n \in \mathrm{N}$.

6. Kadangi $2^5 = 32 \equiv 6 \pmod{13}$, tai iš lyginių savybių išplaukia, jog

$$2^{10} \equiv 36 \equiv -3 \pmod{13},$$
$$2^{15} \equiv -18 \equiv 8 \pmod{13}. \qquad (1)$$

Panašiai gausime:

$$3^5 = 243 \equiv -4 \pmod{13},$$
$$3^{15} \equiv -64 \equiv 1 \pmod{13}. \qquad (2)$$

Panariui sudėję (1) ir (2) lyginius, turėsime:

$$2^{15} + 3^{15} \equiv 9 \pmod{13}.$$

Vadinasi, skaičių $2^{15} + 3^{15}$ dalydami iš 13, gausime liekaną 9. Taigi $2^{15} + 3^{15}$ nesidalija iš 13.

7. Skaičiuodami įsitikiname šių lyginių teisingumu:

$$13^2 = 169 \equiv 21 \pmod{37},$$

$$13^4 = 21^2 = 441 \equiv -3 \pmod{37},$$

$$13^8 \equiv 9 \pmod{37},$$

$$13^{16} \equiv 81 \equiv 7 \pmod{37}; \qquad (3)$$

$$2^5 = 32 \equiv -5 \pmod{37},$$

$$2^{25} \equiv -3125 \equiv -17 \pmod{37}; \qquad (4)$$

$$5^5 = 3125 \equiv 17 \pmod{37},$$

$$5^{15} \equiv 4913 \equiv -8 \pmod{37}. \qquad (5)$$

Tuomet iš (3), (4) ir (5) lyginių turėsime:

$$13^{16} - 2^{25} \cdot 5^{15} \equiv 7 - (-17) \cdot (-8) = -129 \equiv 19 \pmod{37}.$$

Taigi ieškomoji liekana yra 19.

8. Kadangi $16 \equiv 4 \pmod 8$, $17 \equiv 1 \pmod 8$, $17^{17} \equiv 1 \pmod 8$, tai

$$116 \equiv 4 \pmod 8,$$

$$(116 + 17^{17})^3 \equiv 125 \equiv 5 \pmod 8,$$

$$(116 + 17^{17})^{21} \equiv 5 \pmod 8.$$

Vadinasi, ieškomoji liekana lygi 5.

9. Ieškomąjį keturženklį skaičių pažymėkime $\overline{x97y}$. Kad šis skaičius dalytųsi iš 45, jis turi dalytis iš 5 ir iš 9. Skaičius dalijasi iš 5, kai jo paskutinis skaitmuo yra 0 arba 5. Jeigu $y = 0$, tai skaitmenų suma $x + 9 + 7 + 0 = 16 + x$ turi dalytis iš 9. Gauname $x = 2$. Kai $y = 5$, tai skaitmenų suma $x + 9 + 7 + 5 = x + 21$ dalijasi iš 9 tik tuomet, kai $x = 6$. Taigi ieškomasis skaičius yra 2970 arba 6975.

10. Norėdami surasti skaičiaus paskutinįjį skaitmenį, turėsime apskaičiuoti liekaną, gaunamą dalijant šį skaičių iš 10. Taigi surasime liekaną, kuri gaunama 2^{2000} dalijant iš 10:

$$2^5 = 32 \equiv 2 \pmod{10},$$

$$2^{10} \equiv 4 \pmod{10},$$

$$2^{40} \equiv 256 \equiv 6 \equiv -4 \pmod{10},$$

$$(2^{40})^{50} \equiv (-4)^{50} \pmod{10};$$

$$(-4)^2 = 16 \equiv -4 \pmod{10},$$

$$(-4)^{16} \equiv -4 \pmod{10},$$

$$(-4)^{32} \equiv -4 \pmod{10},$$

$$(-4)^{48} \equiv 16 \equiv -4 \pmod{10},$$

$$(-4)^{50} \equiv 16 \equiv 6 \pmod{10}.$$

Vadinasi, $2^{2000} \equiv 6 \pmod{10}$. Taigi paskutinysis skaičiaus 2^{2000} skaitmuo yra 6.

ANTROSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

1. Taikydami Euklido algoritmą skaičiams -3523 ir 1300, gauname:

$$-3523 = (-3)\cdot 1300 + 377,$$

$$1300 = 3\cdot 377 + 169,$$

$$377 = 2\cdot 169 + 39,$$

$$169 = 4\cdot 39 + 13,$$

$$39 = 3\cdot 13\ .$$

Ats. $-\dfrac{3523}{1300} = [-3, 3, 2, 4, 3]$.

2. Sudarome lentelę:

k	-1	0	1	2	3	4	5	6
q_k		**–7**	**2**	**1**	**4**	**6**	**1**	**3**
P_k	1	–7	–13	–20	–93	–578	–671	–2591
Q_k	0	1	2	3	14	87	101	390

Ats. $r = R_6 = -\dfrac{2591}{390}$.

3. Pirmiausiai randame GT elementus:

$$-3\frac{41}{119} = -4 + \frac{78}{119},$$
$$119 = 1\cdot 78 + 41,$$
$$78 = 1\cdot 41 + 37,$$
$$41 = 1\cdot 37 + 4,$$
$$37 = 9\cdot 4 + 1,$$
$$4 = 4\cdot 1.$$

Taigi $-3\dfrac{41}{119} = [-4, 1, 1, 1, 9, 4]$.

Dabar sudarome lentelę:

k	-1	0	1	2	3	4	5
q_k		**–4**	**1**	**1**	**1**	**9**	**4**
P_k	1	–4	–3	–7	–10	–97	–398
Q_k	0	1	1	2	3	29	119

Ats. $R_0 = -4$, $R_1 = -3$, $R_2 = -\dfrac{7}{2}$, $R_3 = -\dfrac{10}{3}$, $R_4 = -\dfrac{97}{29}$,
$R_5 = -3\dfrac{41}{119} = -\dfrac{398}{119}$.

Kadangi $P_2 = -7$, $Q_2 = 2$, $P_3 = -10$, $Q_3 = 3$, tai, kai $k = 3$, gausime:

$$P_2Q_3 - P_3Q_2 = (-7)\cdot 3 - (-10)\cdot 2 = -21 + 20 = -1 = (-1)^3.$$

4. Randame GT elementus:

$$11929 = 0 \cdot 12877 + 11929,$$
$$12877 = 1 \cdot 11929 + 948,$$
$$11929 = 12 \cdot 948 + 553,$$
$$948 = 1 \cdot 553 + 395,$$
$$553 = 1 \cdot 395 + 158,$$
$$395 = 2 \cdot 158 + 79,$$
$$158 = 2 \cdot 79$$

Tad $\frac{11929}{12877} = [0, 1, 12, 1, 1, 2, 2]$. Sudarome lentelę:

k	−1	0	1	2	3	4	5	6
q_k		**0**	**1**	**12**	**1**	**1**	**2**	**2**
P_k	1	0	1	12	13	25	63	151
Q_k	0	1	1	13	14	27	68	163

Ats. $r = \frac{151}{163}$. $R_0 = 0$, $R_2 = \frac{12}{13}$, $R_4 = \frac{25}{27}$, $R_6 = \frac{151}{163}$, $R_5 = \frac{63}{68}$, $R_3 = \frac{13}{14}$, $R_1 = 1$.

5. Kadangi, $r = [-1, 2, 1, 1, 1, 5, 1, 1, 1, 4]$, tai sudarę reduktų lentelę

k	−1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
q_k		**−1**	**2**	**1**	**1**	**1**	**5**	**1**	**1**	**1**	**4**
P_k	1	−1	−1	−2	−3	−5	−28	−33	−61	−94	−437
Q_k	0	1	2	3	5	8	45	53	98	151	702

ir pasinaudoję 7-tąja reduktų savybe, konstatuojame, kad

$$|r - R_5| < \frac{1}{45 \cdot 53} = \frac{1}{2385} < 0{,}002 .$$

Ats. $r \cong R_5 = -\frac{28}{45}$.

6. Išskleidę skaičių $\frac{12}{31}$ BGT, gauname: $\frac{12}{31} = [0, 2, 1, 1, 2, 2]$. Taigi $n = 5$. Apskaičiuojame reduktus:

k	-1	0	1	2	3	4	5
q_k		**0**	**2**	**1**	**1**	**2**	**2**
P_k	1	0	1	1	2	5	12
Q_k	0	1	2	3	5	13	31

Priešpaskutinis reduktas $R_4 = \frac{5}{13}$, todėl bendrasis duotosios lygties sprendinys yra:

$$\left((-1)^4 436\cdot 13 + 31t,\ (-1)^5 436\cdot 5 - 12t\right) = (5668 + 31t,\ -2180 - 12t),$$
$$t \in Z.$$

Lieka parinkti sveikąjį skaičių t taip, kad galiotų: $1 \le x_0 \le 31$ ir $1 \le y_0 \le 12$. Tinka vienintelė reikšmė $t = -182$.

Tada $x_0 = 26$, $y_0 = 4$.

Ats. $(5668 + 31t,\ -2180 - 12t)$, $t \in Z$; balandžio 26-oji.

7. $\sqrt{23} = 4 + (\sqrt{23} - 4) \Rightarrow q_0 = 4$;

$$\frac{1}{\sqrt{23}-4} = \frac{\sqrt{23}+4}{7} = 1 + \frac{\sqrt{23}-3}{7} \Rightarrow q_1 = 1;$$

$$\frac{7}{\sqrt{23}-3} = \frac{\sqrt{23}+3}{2} = 3 + \frac{\sqrt{23}-3}{2} \Rightarrow q_2 = 3;$$

$$\frac{2}{\sqrt{23}-3} = \frac{\sqrt{23}+3}{7} = 1 + \frac{\sqrt{23}-4}{7} \Rightarrow q_3 = 1;$$

$$\frac{7}{\sqrt{23}-4} = \sqrt{23} + 4 = 8 + (\sqrt{23} - 4) \Rightarrow q_4 = 8;$$

$$\frac{1}{\sqrt{23}-4} = \frac{\sqrt{23}+4}{7} = 1 + \frac{\sqrt{23}-3}{7} \Rightarrow q_5 = 1,$$

ir elementai pradeda kartotis. Taigi

$$\sqrt{23} = [4, 1, 3, 1, 8, 1, 3, 1, 8, \ldots] = [4, \overline{1, 3, 1, 8}].$$

Lentelėje imsime tiek skleidinio elementų, kad pasiektume nurodytą tikslumą.

k	-1	0	1	2	3	4	5	6
q_k		**4**	**1**	**3**	**1**	**8**	**1**	......
P_k	1	4	5	19	24	211	......	......
Q_k	0	1	1	4	5	44	49	......

Kadangi

$$Q_3 \cdot Q_4 = 5 \cdot 44 < 1000,$$

o jau

$$Q_4 \cdot Q_5 = 44 \cdot 49 = 2156 > 1000,$$

tai užduoties sąlygas tenkina R_4.

Ats. $\sqrt{23} = [4, \overline{1, 3, 1, 8}]$; $\sqrt{23} \cong R_4 = \dfrac{211}{44}$.

8. Mažesnioji šaknis yra iracionalusis skaičius $x_1 = \dfrac{5-\sqrt{13}}{2}$.

Jo skleidinys yra: $x_1 = [0, 1, 2, \overline{3}]$. Reduktai: $R_0 = 0$, $R_1 = 1$, $R_2 = \dfrac{2}{3}$, $R_3 = \dfrac{7}{10}$, $R_4 = \dfrac{23}{33}$, $R_5 = \dfrac{76}{109}$, ... Užduoties sąlygą tenkina reduktas R_4, nes $33 \cdot 109 > 500$.

Ats. $x_1 = [0, 1, 2, \overline{3}]$; $x_1 \cong R_4 = \dfrac{23}{33}$.

9. $m = 2, h = 2$. Rasime iracionalųjį skaičių β, kuris išreiškiamas atitinkama grynai periodine GT. Pagal lentelę

k	-1	0	1
q_k		**1**	**4**
P_k	1	1	5
Q_k	0	1	4

sudarome kvadratinę lygtį β apskaičiuoti:

$$4\beta^2 - 4\beta - 1 = 0 \Rightarrow \beta = \frac{1+\sqrt{2}}{2}.$$

Dabar iš lentelės pagal priešperiodžio elementus

k	-1	0	1
q_k		**–3**	**2**
P_k	1	-3	-5
Q_k	0	1	2

randame, kad : $\alpha = \dfrac{-5\beta - 3}{2\beta + 1} = \dfrac{-5\cdot\frac{1+\sqrt{2}}{2} - 3}{2\cdot\frac{1+\sqrt{2}}{2} + 1} = \dfrac{-5\sqrt{2} - 11}{2(\sqrt{2}+2)} =$

$$= \frac{(-5\sqrt{2} - 11)(\sqrt{2} - 2)}{2(-2)} = \frac{\sqrt{2}}{4} - 3.$$

Ats. $\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{4} - 3$.

10. Kadangi

$$n < \sqrt{n^2 + 2} < \sqrt{n^2 + 2n + 1} < n + 1\,, \qquad (*)$$

tai $q_0 = n$. Tada

$$\frac{1}{\sqrt{n^2+2} - n} = \frac{\sqrt{n^2+2} + n}{2} = n + \frac{\sqrt{n^2+2} - n}{2} \Rightarrow q_1 = n,$$

nes, pagal (*) įvertį, $0 < \dfrac{\sqrt{n^2+2} - n}{2} < \dfrac{1}{2}$.

Toliau

$$\frac{2}{\sqrt{n^2+2} - n} = \sqrt{n^2+2} + n = 2n + \left(\sqrt{n^2+2} - n\right) \Rightarrow q_2 = 2n$$

ir elementai pradeda kartotis. Taigi

$$\sqrt{n^2 + 2} = [n, n, 2n, n, 2n, n, 2n, n, \ldots].$$

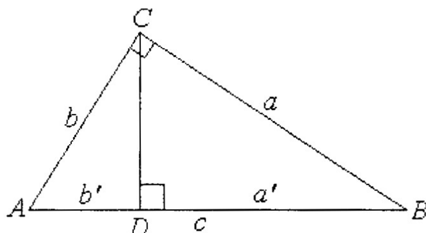
TREČIOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

1. $\Delta ACB \sim \Delta BDC$, nes $\angle ACB = \angle BDC = 90°$ ir $\angle B$ – bendras.

Iš šių trikampių panašumo:

$$\frac{c}{a} = \frac{a}{a'};\ a^2 = ca';$$

$$a = \sqrt{ca'}.$$



1 pav.

$\Delta ACB \sim \Delta ADC$, nes $\angle ACB = \angle ADC = 90°$ ir $\angle A$ – bendras. Iš šių trikampių panašumo:

$$\frac{c}{b} = \frac{b}{b'};\quad b^2 = cb';\quad b = \sqrt{cb'}.$$

Sudėję panariui lygybes $a^2 = ca'$ ir $b^2 = cb'$, gauname:

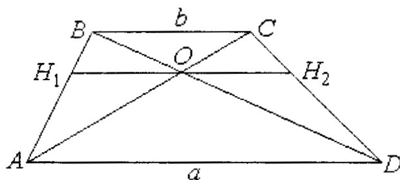
$$a^2 + b^2 = ca' + cb' = c(a' + b') = c^2.$$

Gavome Pitagoro teoremos formulę:

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

2. $\Delta H_1BO \sim \Delta ABD$, nes $H_1O \| AD$. Iš šių trikampių panašumo: $\dfrac{H_1O}{AD} = \dfrac{BH_1}{AB}$.

$\Delta H_1AO \sim \Delta ABC$, nes $H_1O \| BC$. Iš šių trikampių panašumo: $\dfrac{H_1O}{BC} = \dfrac{AH_1}{\cdot AB}$.



2 pav.

Gautas dvi lygybes panariui sudedame: $\dfrac{H_1O}{AD} + \dfrac{H_1O}{BC} = 1$.

Iš čia $H_1O \cdot \left(\dfrac{1}{AD} + \dfrac{1}{BC}\right) = 1$ arba

$$H_1O = \frac{1}{\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}} \qquad (1)$$

Analogiškai gautume

$$OH_2 = \frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \qquad (2)$$

(1) ir (2) lygybes panariui sudedame: $H_1H_2 = \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$.

3. Tegul a ir b – du teigiamas reikšmes įgyjantys kintamieji, be to, $ab = C$, čia C – pastovus skaičius.

Kai $a \neq b$, pagal (2) nelygybę (žr. 2 pavyzdį):

$$a+b>2\sqrt{ab}\text{, t.y. } a+b>2\sqrt{C}.$$

Kai $a = b$, turime $a+b = 2\sqrt{ab}$, t.y. $a+b = 2\sqrt{C}$.

Vadinasi, suma įgyja mažiausią reikšmę, lygią $2\sqrt{C}$, kai kintamieji a ir b yra lygūs.

4. Tegul postamento pagrindo kraštinių ilgiai yra x ir y. Tada postamento aukštis lygus $\sqrt{x^2 + y^2}$, o jo paviršiaus plotas:

$$S = 2(x+y)\cdot\sqrt{x^2+y^2}+8,$$

be to, $xy = 4$.

Pasinaudoję 2 pavyzdžio (2) ir (3) nelygybėmis, gauname:

$$x+y \geq 2\sqrt{xy} = 4; \quad x^2+y^2 \geq 2xy = 8,$$

o iš čia $\sqrt{x^2+y^2} \geq \sqrt{8}$.

Vadinasi,

$$S \geq 2\cdot 4\cdot\sqrt{8}+8 = 8+16\sqrt{2}(\text{m}^2).$$

Be to, lygybė galios, kai $x = y = 2$. Tada pagrindo perimetras $2(x + y)$ ir postamento aukštis $\sqrt{x^2+y^2}$ įgyja mažiausias reikšmes.

Taigi postamento visas paviršius bus mažiausias, kai pagrinde turėsime kvadratą, kurio kraštinės ilgis 2 m.

5. Įvedame naują kintamąjį

$$y = \frac{(x-1)+(x-2)+(x-3)+(x-4)}{4} = x - 2{,}5.$$

Tada

$$(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) = (y+1{,}5)(y+0{,}5)(y-0{,}5)(y-1{,}5) =$$
$$= (y^2 - 0{,}25)(y^2 - 2{,}25).$$

Sprendžiame lygtį $y^4 - 2{,}5y^2 + 0{,}5625 = 120$. Pažymime $y^2 = z$ $(z \geq 0)$. Gauname

$$z^2 - 2{,}5z - 119{,}4375 = 0,$$
$$z = \frac{2{,}5 \pm 22}{2},$$
$$z_1 = 12{,}25;$$
$$z_2 = -9{,}75 \text{ (netinka)};$$
$$y^2 = 12{,}25,$$
$$y = \pm 3{,}5,$$
$$x - 2{,}5 = -3{,}5 \quad \text{arba} \quad x - 2{,}5 = 3{,}5;$$
$$x = -1 \quad \text{arba} \quad x = 6.$$

Ats.: -1; 6.

6. Vidutinis automobilio greitis lygus

$$\frac{3}{\frac{1}{54}+\frac{1}{45}+\frac{1}{60}} \approx 52{,}3 \text{ (km/h)}.$$

7. Pagal 2 pavyzdžio (3) nelygybę

$$2ab \leq a^2 + b^2, \text{ arba } a^2 + b^2 + 2ab \leq 2a^2 + 2b^2, \text{ arba}$$
$$\frac{a^2 + b^2 + 2ab}{4} \leq \frac{a^2 + b^2}{2},$$
$$\text{arba } \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \leq \frac{a^2 + b^2}{2}, \text{ arba } \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}.$$

Lygybė galioja tik tada, kai $a = b$.

8. Pasinaudojame 3 pavyzdyje įrodyta nelygybe

$$\frac{a+b+c+d}{4} \geq \sqrt[4]{abcd}, \text{ kai } a \geq 0,\ b \geq 0,\ c \geq 0,\ d \geq 0.$$

Paėmę $d = \frac{a+b+c}{3}$, turime

$$\frac{a+b+c+\frac{a+b+c}{3}}{4} \geq \sqrt[4]{abc \cdot \frac{a+b+c}{3}},$$

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[4]{abc \cdot \frac{a+b+c}{3}}.$$

Abi nelygybės puses pakėlę ketvirtuoju laipsniu, gauname:

$$\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^4 \geq abc \cdot \frac{a+b+c}{3}, \quad \text{o iš čia} \quad \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 \geq abc,$$

$$\text{arba} \quad \frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}.$$

Lygybės ženklas galimas tik tada, kai $a = b = c$.

9. Remdamiesi 3 pavyzdžiu, turime:

$$\frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4} \geq \sqrt[4]{a_1 a_2 a_3 a_4}. \tag{1}$$

Tegul

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= \frac{b_1+b_2}{2}, \quad a_2 = \frac{b_3+b_4}{2}, \\ a_3 &= \frac{b_5+b_6}{2}, \quad a_4 = \frac{b_7+b_8}{2}. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Įrašę a_1, a_2, a_3, a_4 reikšmes iš (2) į (1) gauname:

$$\frac{b_1+b_2+\ldots+b_7+b_8}{8} \geq \sqrt[4]{\left(\frac{b_1+b_2}{2}\right)\left(\frac{b_3+b_4}{2}\right)\left(\frac{b_5+b_6}{2}\right)\left(\frac{b_7+b_8}{2}\right)} \tag{3}$$

Kadangi

$$\frac{b_1+b_2}{2} \geq \sqrt{b_1 b_2}, \quad \frac{b_3+b_4}{2} \geq \sqrt{b_3 b_4},$$

$$\frac{b_5+b_6}{2} \geq \sqrt{b_5 b_6}, \quad \frac{b_7+b_8}{2} \geq \sqrt{b_7 b_8},$$

tai

$$\sqrt[4]{\left(\frac{b_1+b_2}{2}\right)\left(\frac{b_3+b_4}{2}\right)\left(\frac{b_5+b_6}{2}\right)\left(\frac{b_7+b_8}{2}\right)} \geq \sqrt[4]{\sqrt{b_1b_2}\sqrt{b_3b_4}\sqrt{b_5b_6}\sqrt{b_7b_8}}. \quad (4)$$

Toliau iš (3) ir (4) gauname:

$$\frac{b_1+b_2+\ldots+b_7+b_8}{8} \geq \sqrt[4]{\sqrt{b_1b_2}\sqrt{b_3b_4}\sqrt{b_5b_6}\sqrt{b_7b_8}}, \text{ arba}$$

$$\frac{b_1+b_2+\ldots+b_7+b_8}{8} \geq \sqrt[8]{b_1b_2\ldots b_7b_8}.$$

Samprotaudami kaip ir 3 pavyzdyje, įsitikiname, kad lygybė galima tik tada, kai $b_1 = b_2 = b_3 = \ldots = b_8$.

10. Sudėję panariui nelygybes

$$\frac{a^4+b^4}{2} \geq a^2b^2, \quad \frac{b^4+c^4}{2} \geq b^2c^2, \quad \frac{a^4+c^4}{2} \geq a^2c^2,$$

gauname

$$a^4+b^4+c^4 \geq a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2. \quad (1)$$

Kadangi

$$\left.\begin{aligned} \frac{a^2b^2+b^2c^2}{2} &\geq \sqrt{a^2b^2\cdot b^2c^2} = b^2|ac| \geq ab^2c, \\ \frac{a^2b^2+a^2c^2}{2} &\geq \sqrt{a^2b^2\cdot a^2c^2} = a^2|bc| \geq a^2bc, \\ \frac{b^2c^2+a^2c^2}{2} &\geq \sqrt{b^2c^2\cdot a^2c^2} = |ab|c^2 \geq abc^2, \end{aligned}\right\}$$

tai

$$a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2 \geq ab^2c+a^2bc+abc^2,$$

arba

$$a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2 \geq abc(a+b+c). \quad (2)$$

Iš (1) ir (2) gauname $a^4+b^4+c^4 \geq abc(a+b+c)$.

Lygybė galioja tik tada, kai $a = b = c$.

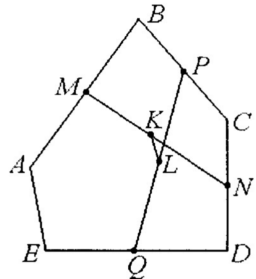
KETVIRTOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

1. $\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{AL} - \overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AQ}\right) - \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN}\right) =$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right) + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AD}\right)\right) -$

$- \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}\right)\right) =$

$= \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}\right) =$



1 pav.

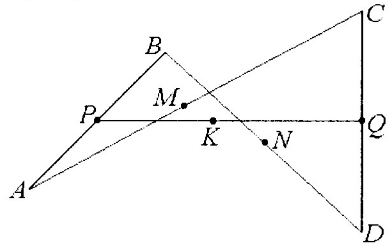
$= \frac{1}{4}\overrightarrow{AE}$. Iš čia $\overrightarrow{KL} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AE}$. Taigi $KL \parallel AE$ ir $AE : KL = 4$.

2. Sakykime, kad atkarpos AC vidurio taškas M, atkarpos BD – taškas N, o atkarpos PQ – taškas K. (žr. 2 pav.). Tuomet

$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}\right)$,

$\overrightarrow{MK} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{MQ}\right) =$

$= \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\right) =$



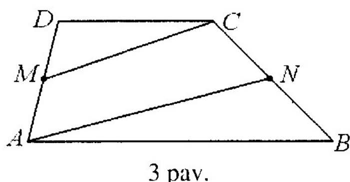
2 pav.

$= \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}\right) + \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}\right) = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}\right)$,

nes $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{0}$.

Iš čia $\overrightarrow{MN} = 2\overrightarrow{MK} \Rightarrow M, N, K$ yra vienos tiesės taškai.

3. Sakykime, kad $\vec{DC} = \lambda \vec{AB}$. Tuomet (žr. 3 pav.)



3 pav.

$$\vec{AN} = \frac{1}{2}\left(\vec{AC} + \vec{AB}\right),$$

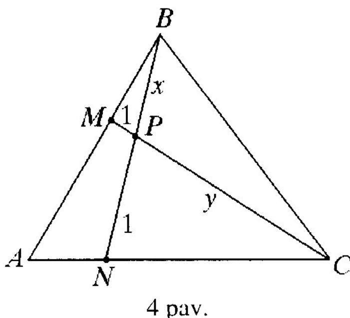
$$\vec{CM} = \frac{1}{2}\left(\vec{CD} + \vec{CA}\right) = \frac{1}{2}\left(-\lambda \vec{AB} - \vec{AC}\right).$$

Jei $AN \| CM$, tai $\vec{CM} = x\vec{AN}$, t.y. $x = -1$ ir $x = -\lambda$. Iš čia $\lambda = 1$ ir $ABCD$ – lygiagretainis.

Jei $ABCD$ – lygiagretainis, tai $\lambda = 1$ ir $\vec{AN} = -\vec{CM}$. Taigi, $AN \| CM$.

Ats.: jei trapecija $ABCD$ nėra lygiagretainis, tai tiesės AN ir CM nelygiagrečios, jei lygiagretainis – lygiagrečios.

4. Sakykime, kad (žr. 4 pav.) $BP : PN = x$. Tuomet



4 pav.

$$\vec{AP} = \frac{\vec{AB} + x\vec{AN}}{1+x} = \frac{\vec{AB} + \frac{x}{5}\vec{AC}}{1+x}.$$

Jei $CP : PM = y$, tuomet

$$\vec{AP} = \frac{\vec{AC} + y\vec{AM}}{1+y} = \frac{\vec{AC} + \frac{3y}{5}\vec{AB}}{1+y}.$$

Dėl $\vec{AP}$ išraiškos vienaties gauname

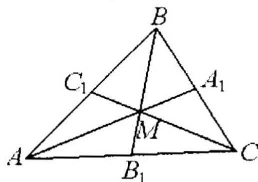
$$\frac{1}{1+x} = \frac{3y}{5(1+y)} \text{ ir } \frac{x}{5(1+x)} = \frac{1}{1+y}.$$

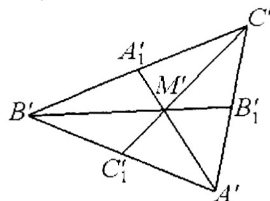
Padaliję vieną lygybę iš kitos, turime $\frac{5}{x} = \frac{3}{5}y$, $x = \frac{25}{3y}$ Iš čia

$$\frac{1}{1+x} = \frac{3y}{3y+25} \text{ ir } \frac{3y}{3y+25} = \frac{3y}{5+5y}, \text{ t.y. } y = 10. \text{ Tuomet } x = \frac{5}{6}.$$

Ats.: $BP : PN = 5 : 6$, $CP : PM = 10 : 1$.

5. Sakykime, kad M ir M' atitinkamai trikampių ABC ir $A'B'C'$ pusiaukraštinių sankirtos taškai (žr. 5 pav.).





5 pav.

Jei $AA_1 \| B'C'$, $BB_1 \| C'A'$, $CC_1 \| A'B'$, tai $\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{B'C'}$, $\overrightarrow{BM} = \mu \overrightarrow{C'A'}$, $\overrightarrow{CM} = \nu \overrightarrow{A'B'}$. Iš lygybės $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{0}$ gauname $\lambda \overrightarrow{B'C'} + \mu \overrightarrow{C'A'} + \gamma \overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{0}$, t.y. $\overrightarrow{B'C'} = -\frac{\mu}{\lambda}\overrightarrow{C'A'} - \frac{\gamma}{\lambda}\overrightarrow{A'B'}$.

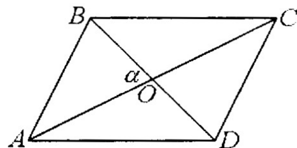
Kita vertus, $\overrightarrow{B'C'} = \overrightarrow{B'A'} + \overrightarrow{A'C'}$. Dėl $\overrightarrow{B'C'}$ išraiškos vienaties $\frac{\mu}{\lambda} = 1$, $\frac{\gamma}{\lambda} = 1$. Iš čia gauname $\mu = \lambda = \gamma$. Todėl

$$\overrightarrow{A'A_1'} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{A'C'}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\lambda}\overrightarrow{CM} - \frac{1}{\lambda}\overrightarrow{BM}\right) = \frac{1}{2\lambda}\overrightarrow{CB},$$

t.y. $A'A_1' \| BC$. Analogiškai teiginį įrodome ir kitoms pusiaukraštinėms.

6. Pagal sąlygą $AB = 2$, $AD = 3$, $\angle A = 60^\circ$ (žr. 6 pav.). Kampą α tarp įstrižainių rasime iš formulės

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}}{|\overrightarrow{AC}| \cdot |\overrightarrow{BD}|}.$$



6 pav.

Kadangi $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$,

$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}^2 - \overrightarrow{AB}^2 = 5$,

$$|\vec{AC}|=\sqrt{\vec{AC}^2}=\sqrt{\vec{AB}^2+2\vec{AB}\cdot\vec{AD}+\vec{AD}^2}=$$
$$=\sqrt{2^2+2\cdot2\cdot3\cdot\frac{1}{2}+3^2}=\sqrt{19};$$
$$|\vec{BD}|=\sqrt{\vec{BD}^2}=\sqrt{\vec{AD}^2-2\vec{AD}\cdot\vec{AB}+\vec{AB}^2}=$$
$$=\sqrt{3^2-2\cdot2\cdot3\cdot\frac{1}{2}+2^2}=\sqrt{7},$$

tai

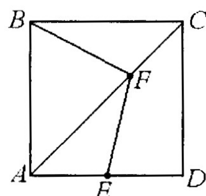
$$\cos\alpha=\frac{5}{\sqrt{19\cdot7}}=\frac{5}{\sqrt{133}}.$$

Ats.: $\arccos\frac{5}{\sqrt{133}}$.

7. Kadangi $\vec{AF}=3\vec{FC}=\frac{3}{4}\vec{AC}$,

$$\vec{EF}=\vec{AF}-\vec{AE}=\frac{3}{4}\vec{AC}-\frac{1}{2}\vec{AD}=\frac{3}{4}\left(\vec{AB}+\vec{AD}\right)-\frac{1}{2}\vec{AD}=\frac{3}{4}\vec{AB}+\frac{1}{4}\vec{AD},$$

$$\vec{BF}=\vec{AF}-\vec{AB}=\frac{3}{4}\left(\vec{AB}+\vec{AD}\right)-\vec{AB}=$$
$$=-\frac{1}{4}\vec{AB}+\frac{3}{4}\vec{AD},$$



7 pav.

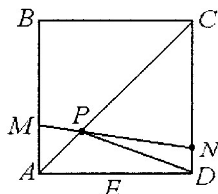
tai $\vec{EF}\cdot\vec{BF}=-\frac{3}{16}\vec{AB}^2+\frac{3}{16}\vec{AD}^2=0$,

nes $AB=AD$. Taigi $EF\perp FB$. (Žr. 7 pav.)

8. Sakykime, kad $MP:PN=x$, $AP:AC=y$. Tada (žr. 8 pav.)

$$\vec{AP}=\frac{\vec{AM}+x\vec{AN}}{1+x}=\frac{\frac{1}{3}\vec{AB}+x\left(\vec{AD}+\frac{1}{6}\vec{DC}\right)}{1+x}=\frac{\left(\frac{1}{6}x+\frac{1}{3}\right)\vec{AB}+x\vec{AD}}{1+x}.$$

Bet $\overrightarrow{AP} = y\overrightarrow{AC} = y\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right)$.



8 pav.

Todėl $y = \dfrac{\frac{1}{6}x + \frac{1}{3}}{1+x} = \dfrac{x}{1+x}$,

$\frac{1}{6}x - x = -\frac{1}{3}$ ir $x = \frac{2}{5}$. Tada $y = \frac{2}{7}$ ir

$\overrightarrow{AP} = \frac{2}{7}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right)$. Taigi $\overrightarrow{PD} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AD} = -\frac{2}{7}\overrightarrow{AB} + \frac{5}{7}\overrightarrow{AD}$.

Vadinasi,

$$\cos\angle APD = \frac{\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PD}}{|\overrightarrow{PA}|\cdot|\overrightarrow{PD}|} = \frac{\frac{4}{49}\overrightarrow{AB}^2 - \frac{10}{49}\overrightarrow{AD}^2}{\sqrt{\frac{8}{49}\overrightarrow{AB}^2}\sqrt{\frac{29}{49}\overrightarrow{AB}^2}} =$$

$$= -\frac{6}{\sqrt{8\cdot 29}} = -\frac{6}{\sqrt{232}} - \frac{3}{\sqrt{58}},$$

$$\cos\alpha = -\frac{3}{\sqrt{58}}.$$

Ats.: $\arccos\left(-\frac{3}{\sqrt{58}}\right)$.

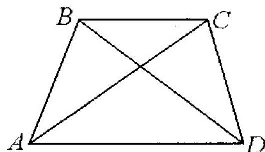
9. Lygybes $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CB}$ pakėlę skaliariškai kvadratu ir sudėję, gauname

$$\overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{BD}^2 = \overrightarrow{AB}^2 + 2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC}^2 + \overrightarrow{CD}^2 - 2\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CB}^2 =$$

$$= \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{CD}^2 + 2\overrightarrow{BC}\cdot(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}) =$$

$$= \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{CD}^2 + 2\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AD} =$$

$$= AB^2 + CD^2 + 2BC\cdot AD,$$



9 pav.

nes $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AD} = |\overrightarrow{BC}|\cdot|\overrightarrow{AD}|$.

Taigi $AC^2 + BD^2 = AB^2 + CD^2 + 2AB\cdot AD$. (Žr. 9 pav.)

10. Pagal sąlygą $AD : DC = 1 : 2$, $AE : EB = 2 : 1$ (žr. 10 pav.).

Sakykime, kad $\overrightarrow{CQ} = x\overrightarrow{CE}$, $\overrightarrow{BQ} = y\overrightarrow{BD}$.

$$\text{Tada } \overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CQ} = \overrightarrow{AC} + x\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{AC} + \frac{x}{3}(\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{CB}) =$$

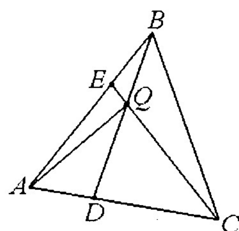
$$= \overrightarrow{AC}\left(1 - \frac{x}{3}\right) + \frac{2}{3}x(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}) = (1-x)\overrightarrow{AC} + \frac{2}{3}x\overrightarrow{AB}$$

ir

$$\overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BQ} = \overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} + \frac{y}{3}(2\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}) =$$

$$= \overrightarrow{AB} + \frac{y}{3}(-2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = (1-y)\overrightarrow{AB} + \frac{y}{3}\overrightarrow{AC}.$$

Todėl $\begin{cases} 1 - x = \dfrac{y}{3}, \\ \dfrac{2}{3}x = 1 - y. \end{cases}$ Iš čia $x = \dfrac{6}{7}$, tuomet



10 pav.

$$\overrightarrow{QA} = -\overrightarrow{AQ} = -\frac{1}{7}\overrightarrow{AC} - \frac{4}{7}\overrightarrow{AB},$$

$$\overrightarrow{QC} = -x\overrightarrow{CE} = -\frac{x}{3}(\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{CB}) =$$

$$= -\frac{x}{3}(-\overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}) = -\frac{x}{3}(-3\overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{AB}) = \frac{6}{7}\overrightarrow{AC}^2 - \frac{4}{7}\overrightarrow{AB}.$$

$$\text{Kadangi } \overrightarrow{QA}\cdot\overrightarrow{QC} = \frac{1}{49}\left(-6\overrightarrow{AC}^2 + 4\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB} - 24\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} + 16\overrightarrow{AB}^2\right) =$$

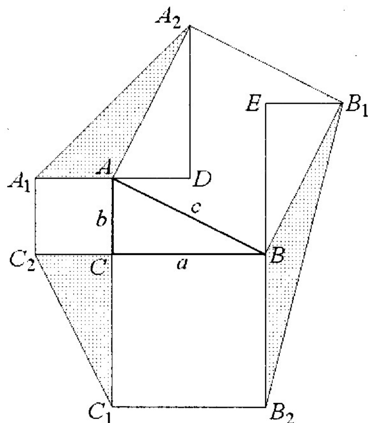
$$= \frac{1}{49}|\overrightarrow{AB}|^2\left(-6 + 4\cdot\frac{1}{2} - 24\cdot\frac{1}{2} + 16\right) = 0, \text{ tai } \angle AQC = 90^\circ.$$

Ats.: 90°.

PENKTOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

1. Šešiakampis $A_1A_2B_1B_2C_1C_2$ sudarytas iš stačiojo trikampio ABC, trijų kvadratų ABB_1A_2, BCC_1B_2, ACC_2A_1 ir trijų trikampių A_1AA_2, B_1BB_2 ir C_1CC_2. Šio šešiakampio plotą apskaičiuosime, kai žinosime anksčiau minėtų trijų trikampių plotus. Nubrėžiame trikampiams A_1AA_2 ir B_1BB_2 aukštines A_2D, B_1E. Kadangi $\Delta AA_2D = \Delta ABC$ ($AB = AA_2 = c$ – kvadrato kraštinės, $\angle AA_2D = \angle ABC$ – kampas su atitinkamai statmenomis kraštinėmis), tai $A_2D = BC = a$. Vadinasi,

$$S_{A_1AA_2} = \frac{1}{2}A_1A \cdot A_2D = \frac{1}{2}b \cdot a.$$



1 pav.

Analogiškai galima įsitikinti, kad $\Delta BB_1E = \Delta BAC$. Taigi $B_1E = AC = b$ ir $S_{B_1BB_2} = \frac{1}{2}BB_2 \cdot B_1E = \frac{1}{2}a \cdot b$.

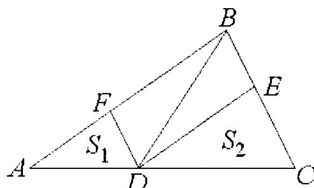
Akivaizdu, kad $S_{C_1CC_2} = = \frac{1}{2}CC_1 \cdot CC_2 = \frac{1}{2}a \cdot b$.

Šešiakampio $A_1A_2B_1B_2C_1C_2$ plotas S lygus $S = a^2 + b^2 + c^2 + 4 \cdot \frac{1}{2}a \cdot b = = (a+b)^2 + (a^2 + b^2)$. Kai $a = 5$ cm, $b = 12$ cm, $S = 17^2 + 25 + 144 = 458\,(\text{cm}^2)$.

Ats. 458 cm^2.

2. Nubrėžkime lygiagretainio *DFBE* įstrižainę *BD*. Trikampių *AFD* ir *FBD* pagrindai *AF* ir *FB* yra vienoje tiesėje, o aukštinė bendra. Tokių trikampių plotų santykis lygus jų pagrindų ilgių santykiui.

Taigi $\dfrac{S_{FBD}}{S_{AFD}}=\dfrac{FB}{AF}$.



2 pav.

Analogiškai $\dfrac{S_{BED}}{S_{ECD}}=\dfrac{BE}{EC}$. Pastebėję, kad $S_{FBD}=S_{BED}=\dfrac{1}{2}S_{DFBE}$ ir sudauginę aukščiau gautas lygybes, turime:

$$\frac{\frac{1}{4}S_{DFBE}^2}{S_{AFD}\cdot S_{ECD}}=\frac{FB\cdot BE}{AF\cdot EC}.$$

Kadangi $\Delta AFD\sim\Delta DEC$ (lygūs atitinkami kampai), tai $\dfrac{AF}{DE}=\dfrac{FD}{EC}$.

Iš čia

$$AF\cdot EC=DE\cdot FD=FB\cdot BE.$$

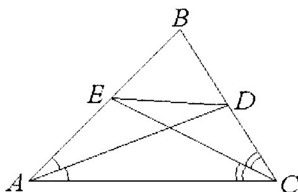
Vadinasi,

$$\frac{S_{DFBE}^2}{4S_1\cdot S_2}=\frac{FB\cdot BE}{FB\cdot BE}=1 \text{ ir } S_{DFBE}^2=4S_1\cdot S_2,$$

t. y. $S_{DFBE}=2\sqrt{S_1\cdot S_2}$.

Ats.: $S_{DFBE}=2\sqrt{S_1\cdot S_2}$.

3. Pagal trikampio pusiaukampinių savybę: $\dfrac{AC}{AE}=\dfrac{BC}{BE}$, t.y. $\dfrac{b}{AE}=\dfrac{a}{c-AE}$ Iš čia: $AE=\dfrac{bc}{a+b}$. Analogiškai įrodoma, kad $BD=\dfrac{ac}{b+c}$. Taigi



3 pav.

$$\frac{S_{ABD}}{S_{ABC}}=\frac{BD}{BC}=\frac{c}{b+c},\ \frac{S_{AED}}{S_{ABD}}=\frac{AE}{AB}=\frac{b}{a+b}.$$

Vadinasi, $\dfrac{S_{ABC}}{S_{AED}} = \dfrac{(a+b)(b+c)}{bc}$. Kai $a = 20\,\text{cm}$, $b = 28\,\text{cm}$, $c = 21\,\text{cm}$, $S_{ABC}/S_{AED} = 4$.

Ats.: $(a+b)(b+c)/bc$; 4.

4. 1. Kadangi $AF \parallel CH$, $DE \parallel BG$, tai keturkampiai *AFCH*, *BGDE ir KLMN* yra lygiagretainiai.

2. Kadangi $AK = KL$ (nes *EK* – trikampio *BAL* vidurinė linija), $MN = MC$ (nes *MG* – trikampio *NCD* vidurinė linija), $MC = 2FL$ (nes *FL* – trikampio *MBC* vidurinė linija), tai $AK = KL = MN = 2FL$ ir $KL = \dfrac{2}{5}AF$.

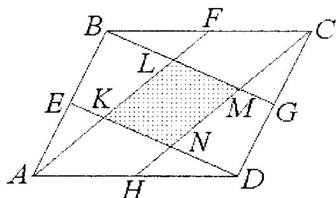
3. $S_{KLMN} = \dfrac{2}{5}S_{AFCH}$.

4. Kadangi

$$S_{AFCH} = \frac{1}{2}S_{ABCD},$$

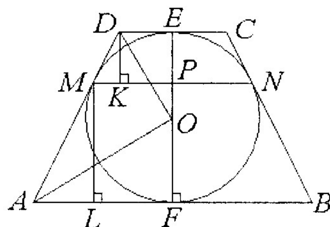
tai $S_{KLMN} = \dfrac{2}{5}\cdot\dfrac{1}{2}S_{ABCD} = \dfrac{1}{5}S$.

Ats.: $S_{KLMN} = \dfrac{1}{5}S$.



4 pav.

5. Brėžinyje pavaizduota lygiašonė trapecija *ABCD*, $\angle DAB = 60^\circ$, *O* – įbrėžto į šią trapeciją apskritimo centras, *MN* – atkarpa, jungianti apskritimo ir šoninių kraštinių lietimosi taškus. *DK* – trapecijos *MDCN* aukštinė, o *ML* – trapecijos *AMNB* aukštinė, o *EF* – trapecijos *ABCD* aukštinė. Kadangi $\angle DAF = 60^\circ$, tai $\angle DMK = 60^\circ$ ir $\angle ADC = 120^\circ$. Tada $\angle ODE = 60^\circ$, nes *DO* – kampo *ADE* pusiaukampinė. Sakykime, $DE = a$, $AF = b$, $OF = R$,



5 pav.

$MP = c$, $DK = h$, $ML = H$. Iš stačiųjų trikampių DOE, AOF, MKD ir ALM randame:

$$DE = a = R\text{ctg}60^\circ = \frac{R\sqrt{3}}{3},\ AF = b = R\text{ctg}30^\circ = R\sqrt{3},$$

$$MP = c = MK + KP = a\cos 60^\circ + a = \frac{3}{2}a = \frac{R\sqrt{3}}{2},$$

$$DK = h = a\sin 60^\circ = \frac{R\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{R}{2},$$

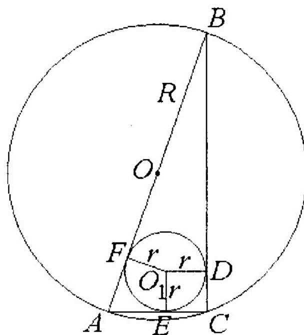
$$ML = H = AM\sin 60^\circ = b\sin 60^\circ = R\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3R}{2}.$$

Vadinasi,

$$\frac{S_{MNCD}}{S_{ABNM}} = \frac{(a+c)h}{(b+c)H} = \frac{\left(\frac{R\sqrt{3}}{3} + \frac{R\sqrt{3}}{2}\right)\cdot\frac{R}{2}}{\left(R\sqrt{3} + \frac{R\sqrt{3}}{2}\right)\cdot\frac{3R}{2}} = \frac{\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}}{\left(1 + \frac{1}{2}\right)\cdot\frac{3}{2}} = \frac{5}{27}.$$

Ats.: $\frac{5}{27}$.

6. Sakykime, R ir r – apibrėžto ir įbrėžto apskritimų spinduliai, o $BC = a$ ir $BD = x$. Tada $BF = x$, $AF = 2R - x = AE$, $AC = 2R - x + r$. Iš stačiojo trikampio ACB: $AC^2 + BC^2 = AB^2$, t.y. $(2R + r - x)^2 + a^2 = 4R^2$. Kadangi $\frac{R}{r} = \frac{5}{2}$, t.y. $R = \frac{5}{2}r$ ir $x = a - r$, tai pagal Pitagoro teoremą trikampiui ACB galima užrašyti



6 pav.

$$(7r - a)^2 + a^2 = 25r^2,\ \text{t.y. } 12r^2 - 7ar + a^2 = 0.$$

Šios kvadratinės lygties sprendiniai: $r_1 = \frac{a}{3}$, $r_2 = \frac{a}{4}$.

Taigi

$$AC_1 = 5r_1 - a + r_1 + r_1 = 7 \cdot \frac{a}{3} - a = \frac{4a}{3};$$

$$AC_2 = 5r_2 - a + r_2 + r_2 = 7 \cdot \frac{a}{4} - a = \frac{3a}{4} \text{ ir}$$

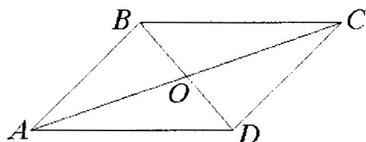
$$S_{ABC_1} = \frac{1}{2} a \cdot 4\frac{a}{3} = \frac{2a^2}{3}; \; S_{ABC_2} = \frac{1}{2} a \cdot \frac{3a}{4} = \frac{3a^2}{8}.$$

Ats.: $\left\{ \frac{2a^2}{3}; \; \frac{3a^2}{8} \right\}$.

7. 1. Paveikslėlyje $ABCD$ – lygiagretainis, O – įstrižainių susikirtimo taškas. Pagal sąlygą $AC = 78$ cm, $BD = 50$ cm, tai

$AO = \frac{1}{2} AC = 39$ cm, o

$OD = \frac{1}{2} BD = 25$ cm.



7 pav.

Sakykime, $AD = x$.

$S_{AOD} = \frac{1}{4} S_{ABCD} = 420$ cm^2.

Pagal Herono formulę: $\sqrt{\frac{64+x}{2} \cdot \frac{x-14}{2} \cdot \frac{x+14}{2} \cdot \frac{64-x}{2}} = 420$. Šią lygtį pakėlę kvadratu ir atlikę keletą veiksmų, gauname: $x^4 - 4292x^2 + 3625216 = 0$. Šios lygties sprendiniai yra: $x_1 = 56$ (cm), $x_2 = 34$ (cm). Taigi lygiagretainio kraštinė $AD = 56$ cm, o $AB = 34$ cm.

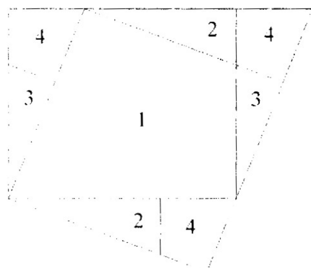
2. Trikampis AOD yra Herono trikampis, nes jo kraštinės $AO = 39$ cm, $OD = 25$ cm ir $AD = 56$ cm yra natūralieji skaičiai ir plotas $S = 420$ (cm^2) – taip pat natūralusis skaičius.

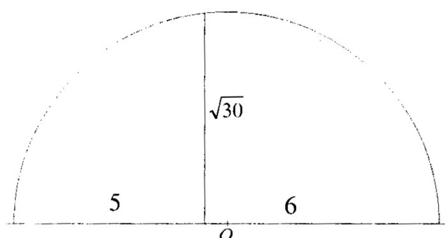
Pagal formulę $(m^2 - n^2, 2mn, m^2 + n^2)$, kai $n = 1$, $m = 2$ gauname Pitagoro trikampį $(3; 4; 5)$, o kai $n = 2$, $m = 3$ gauname Pitagoro trikampį $(5; 12; 13)$. Pirmojo trikampio kraštines padauginę iš 5, o antrojo iš 3, gauname du Pitagoro trikampius

$(15; 20; 25)$ ir $(15; 36; 39)$, iš kurių galima sudėti Herono trikampį $(56; 25; 39)$.

Ats.: 34 cm, 56 cm; $(15; 20; 25)$ ir $(15; 36; 39)$.

8. *1 būdas.* 1. Pirmiausia nubrėžiame kvadrato, lygiapločio duotajam stačiakampiui, kraštinę. (Tiesėje atidedame dvi 5 cm ir 6 cm ilgio atkarpas ir randame jų geometrinį vidurkį. *8 pav.*)





8 pav.

2. Nubrėžiame lygiagretainį, kurio viena kraštinė lygi kvadrato kraštinei, t. y. $\sqrt{30}$ cm, lygiaplotį stačiakampiui.

3. Nubrėžiame kvadratą, lygiaplotį lygiagretainiui (o tuo pačiu ir stačiakampiui).

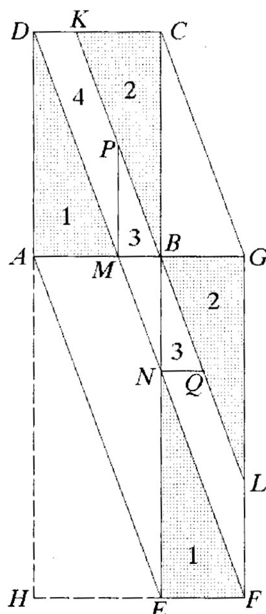
4. Lygios stačiakampio, lygiagretainio ir kvadrato dalys pažymėtos vienodais skaičiais.

2 būdas. Įrodysime bendresnę teoremą: du lygiapločiai stačiakampiai yra lygiadaliai.

Brėžinyje pavaizduoti du lygiapločiai stačiakampiai *ABCD* ir *BEFG*, tai yra $AB \cdot BC = BE \cdot BG$.

1. Nubrėžiame tieses *CG*, *DF* ir *AE*. Kadangi $\frac{AB}{BE} = \frac{BG}{BC}$, tai $AE \parallel CG$.

2. Kadangi $BA = EH$, $BG = EF$,



9 pav.

$BE = AH$, $BC = AD$, tai $\frac{EH}{AH} = \frac{EF}{AD}$. Vadinasi, $DF \parallel AE$.

3. Nubrėžkime tieses $KL \parallel DF$, $MP \parallel AD$, $NQ \parallel BG$; čia taškai M ir N yra tiesės DF susikirtimo su stačiakampių kraštinėmis AB ir BE taškai, o tiesė KL eina per tašką B. $\Delta DAM = \Delta NEF$, nes $AD = NE$ ir $AM = EF$ kaip atitinkamų lygiagretainių priešingosios kraštinės ir $\angle DAM = \angle NEF = 90^\circ$. Analogiškai įrodoma, kad

$$\Delta BCK = \Delta BGL \text{ ir } \Delta PMB = \Delta BNQ.$$

4. Trapecija $DKPM$ lygi trapecijai $NQLF$, nes jų atitinkamos kraštinės lygios, lygūs ir atitinkami kampai.

Gavome, kad stačiakampiai $ABCD$ ir $BGFE$ padalyti lygiagrečiomis tiesėmis į lygias figūras. Remdamiesi šia teorema, padalykite stačiakampį $5 \text{ cm} \times 6 \text{ cm}$ į 4 dalis, iš kurių būtų galima sudėti lygiaplotį kvadratą.

9. a) $AD = \frac{1}{3}AB$. Nesunku įsitikinti, kad trikampiai ADC, CDE ir DEB yra lygiapločiai.

b) $AD = \frac{1}{2}AB$. Kraštines AC ir BC padalykime į 3 lygias dalis. $S_{AED} = S_{EDFC} = S_{DFB}$.

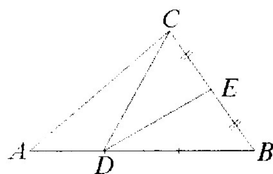
c) $AD < \frac{1}{3}AB$. Viršūnę C sujungiame atkarpomis su tašku D ir su tašku E ($AE = \frac{1}{3}AB$). Per tašką E brėžiame tiesę EF, lygiagrečią CD. $S_{ADFC} = S_{ACE} = \frac{1}{3}S_{ABC}$ (žr. 7 pavyzdį).

Dabar atkarpą BF padaliję pusiau, gauname du trikampius DFG ir DGB, kurių plotai lygūs $\frac{1}{3}S_{ABC}$.

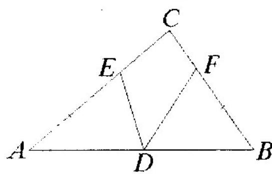
d) $\frac{1}{3}AB < AD < \frac{2}{3}AB$. $AE = \frac{1}{3}AB$. Tašką C sujungiame su taškais E ir D atkarpomis. Per tašką E brėžiame tiesę $EF \parallel CD$.

$S_{ADF} = S_{ACE} = \frac{1}{3}S_{ABC}$ (žr. 7 pavyzdį).

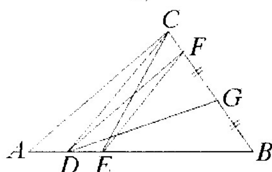
Keturkampio $DFCB$ įstrižainę FB padalijame pusiau ir nubrėžiame tiesę DG, kuri keturkampio $DFCB$ plotą dalija pusiau (žr. 8 pavyzdį). Taigi $S_{AFD} = S_{DFCG} = S_{DGB} = \frac{1}{3} S_{ABC}$.



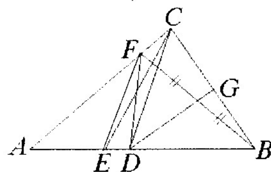
a)



b)



c)



d)

10 pav.

10. Sakykime, $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$. Pagal uždavinio sąlygą $4b = 20 + \frac{c^2}{4} + a^2$ arba $b = \frac{1}{4}\left(20 + \frac{c^2}{4} + a^2\right)$. Pasinaudoję trikampio nelygybe $b \le a + c$, gauname: $\frac{1}{4}\left(20 + \frac{c^2}{4} + a^2\right) \le a + c$ arba $20 + \frac{c^2}{4} + a^2 - 4a - 4c \le 0$. Iš čia $\left(\frac{c}{2} - 4\right)^2 + (a-2)^2 \le 0$. Gautoji nelygybė teisinga tik tada, kai $\frac{c}{2} - 4 = 0$ ir $a - 2 = 0$, t.y., kai $c = 8$ (km), o $a = 2$ (km). Kadangi

$$b = \frac{1}{4}\left(20 + \frac{8^2}{4} + 2^2\right) = 10 \text{ (km)},$$

tai miško plotas $S = 4 \cdot 10 = 40$ (km^2). Pastebėsime, kai $b = a + c$, t. y. visos trys gyvenvietės A, B ir C yra vienoje tiesėje.

Ats.: 40 km^2.

ŠEŠTOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

1. Lygties kairioji pusė apibrėžta su $x \geq 8$. Kai $x \in [8; +\infty)$, gauname

$$x+1>0,\ 5-x<0 \text{ ir } \sqrt{x-8}+2>0.$$

Todėl sandauga $(x+1)(5-x)(\sqrt{x-8}+2)$ yra neigiama visoje apibrėžimo srityje. Taigi duotoji lygtis sprendinių neturi.

2. Keliame abi lygties puses kubu. Gauname

$$\sqrt[3]{x(2x-3)}\left(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{2x-3}\right)=3(x-1).$$

Šaknų sumą skliausteliuose pakeičiame dešiniąja duotosios lygties puse, t. y. šaknimi $\sqrt[3]{12(x-1)}$, o lygtį

$$\sqrt[3]{x(2x-3)}\cdot\sqrt[3]{12(x-1)}=3(x-1)$$

– ekvivalenčia jai lygtimi

$$\sqrt[3]{x-1}\left(\sqrt[3]{12x(2x-3)}-3\sqrt[3]{(x-1)^2}\right)=0.$$

Vadinasi, $x=1$ arba $\sqrt[3]{12x(2x-3)}=3\sqrt[3]{(x-1)^2}$. Spręsdami pastarąją lygtį, abi puses keliame kubu ir gauname kvadratinę lygtį $x^2-6x+9=0$, turinčią (vieną) sprendinį $x=3$. Belieka patikrinti, ar $x=1$ ir $x=3$ tenkina duotąją lygtį.

Ats.: 1; 3.

3. Pasinaudoję keitiniu $t=\sqrt{x-1}$, gauname lygtį

$$\sqrt{(t-2)^2}+\sqrt{(t-3)^2}=1, \text{ arba } |t-2|+|t-3|=1.$$

Intervaluose $(-\infty; 2)$ ir $(3; +\infty)$ ši lygtis sprendinių neturi, o intervale $[2; 3]$ ji yra tapatybė. Taigi

$$2\leq t\leq 3,\ 2\leq\sqrt{x-1}\leq 3,\ 4\leq x-1\leq 9,\ 5\leq x\leq 10.$$

Ats.: $5\leq x\leq 10$.

4. Turime iracionaliąją lygtį

$$\sqrt{1+\frac{9}{x}}+4\sqrt{\frac{x}{x+9}}=4.$$

Naudodami keitinį

$$t=\sqrt{1+\frac{9}{x}},$$

gauname lygtį

$$t+\frac{4}{t}=4, \text{ arba } t^2-4t+4=0.$$

Ji turi vieną sprendinį $t=2$. Taigi $\sqrt{1+\frac{9}{x}}=2$ ir $x=3$.

Ats.: $x=3$.

5. $\sqrt{x+a\sqrt{x}+b}+\sqrt{x}=c \Leftrightarrow \begin{cases} t=\sqrt{x}, \\ \sqrt{t^2+at+b}=c-t \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t=\sqrt{x}, \\ t^2+at+b=(c-t)^2, \\ 0\le t\le c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=\sqrt{x}, \\ (a+2c)t=c^2-b, \\ 0\le t\le c. \end{cases}$$

Iš pastarosios sistemos gauname, kad duotoji lygtis turi be galo daug sprendinių tik tada, kai $a+2c=0,\ \ c^2-b=0,\ \ c>0$, t. y. $a=-2c,\ b=c^2,\ c>0$.

Ats.: $a=-2c,\ b=c^2,\ c>0$.

6. $\sqrt{\sqrt{x+1}}+\sqrt{\sqrt{x+1}+3}<\sqrt{2\sqrt{x+1}+2} \Leftrightarrow \begin{cases} t=\sqrt{x+1},\ x\ge -1, \\ \sqrt{t}+\sqrt{t+3}<\sqrt{2t+2} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t=\sqrt{x+1},\ x\ge -1, \\ \left(\sqrt{t}+\sqrt{t+3}\right)^2<\left(\sqrt{2t+2}\right)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=\sqrt{x+1},\ x\ge -1, \\ 2t+3+2\sqrt{t(t+3)}<2t+2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t=\sqrt{x+1},\ x\geq -1, \\ 1+2\sqrt{t(t+3)}<0. \end{cases}$$

Pastaroji nelygybė sprendinių neturi, todėl ir duotoji nelygybė neturi sprendinių.

7. $\sqrt{5x^2+10x+1}\geq 7-x^2-2x \Leftrightarrow \sqrt{5(x^2+2x)+1}\geq 7-(x^2+2x)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t=x^2+2x, \\ \sqrt{5t+1}\geq 7-t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=x^2+2x, \\ 7-t<0, \\ 5t+1\geq 0 \end{cases} \text{ arba } \begin{cases} t=x^2+2x, \\ 7-t\geq 0, \\ 5t+1\geq (7-t)^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t=x^2+2x, \\ t>7 \end{cases} \text{ arba } \begin{cases} t=x^2+2x, \\ t\leq 7, \\ t^2-19t+48\leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x^2+2x>7 \text{ arba}$$

$3\leq x^2+2x\leq 7 \Leftrightarrow x^2+2x\geq 3 \Leftrightarrow x\leq -3$ arba $x\geq 1$.

Ats.: $(-\infty;-3]\cup[1;+\infty)$.

8. Duotoji nelygybė ekvivalenti nelygybei

$$\frac{3}{x+1}+\frac{7}{x+2}<\frac{6}{x-1} \Leftrightarrow \frac{4x^2-15x-25}{(x+1)(x+2)(x-1)}<0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(x+\frac{5}{4}\right)(x-5)}{(x+1)(x+2)(x-1)}<0.$$

Išsprendę pastarąją nelygybę, gauname:

$$x\in(-\infty;-2)\cup\left(-\frac{5}{4};-1\right)\cup(1;5).$$

Ats.: $(-\infty;-2)\cup\left(-\frac{5}{4};-1\right)\cup(1;5)$.

9. $\sqrt{2x-1}+\sqrt{3x-2}<\sqrt{4x-3}+\sqrt{5x-4} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = x-1 \ge -0{,}2, \\ \sqrt{2t+1}+\sqrt{3t+1}<\sqrt{4t+1}+\sqrt{5t+1}. \end{cases}$$

Kai $t>0$, pastaroji nelygybė galioja, nes $\sqrt{2t+1}<\sqrt{4t+1}$ ir $\sqrt{3t+1}<\sqrt{5t+1}$.

Kai $t=0$, ši nelygybė negalioja.

Intervale $[-0{,}2; 0)$ ji taip pat neturi sprendinių, nes

$$\sqrt{2t+1}>\sqrt{4t+1}, \ \sqrt{3t+1}>\sqrt{5t+1}$$

ir

$$\sqrt{2t+1}+\sqrt{3t+1}>\sqrt{4t+1}+\sqrt{5t+1}.$$

Vadinasi, duotąją nelygybę tenkina tik tos x reikšmės, su kuriomis $x-1>0$, t.y. $x>1$.

Ats.: $(1; +\infty)$.

10. $\dfrac{\sqrt{2-x}+4x-3}{x} \ge 2 \Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{2-x}+2x-3}{x} \ge 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 2-x \ge 0, \\ \dfrac{\sqrt{t}-2t+1}{2-t} \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2-x \ge 0, \\ \dfrac{2t-\sqrt{t}-1}{t-2} \ge 0. \end{cases}$$

Kai $t>1$, tai $t>\sqrt{t}$ ir $2t-\sqrt{t}-1>0$. Todėl

$$t-2>0 \Rightarrow t>2 \Rightarrow x<0.$$

Kai $0 \le t \le 1$, tai $t-2<0$. Todėl

$$2t-\sqrt{t}-1 \le 0.$$

Išsprendę šią nelygybę, gauname

$$0 \le t \le 1 \Rightarrow 0 \le 2-x \le 1 \Rightarrow 1 \le x \le 2.$$

Ats.: $(-\infty; 0) \cup [1; 2]$.

SEPTINTOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

1. $3\sin^2 2x + 7\cos 2x = 3 \Leftrightarrow 3(1-\cos^2 2x) + 7\cos 2x = 3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos 2x(7-3\cos 2x) = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = 0 \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in Z$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2},\ k \in Z.$

Ats.: $\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2},\ k \in Z.$

2. $\sin 4x \cdot \cos x \cdot \mathrm{tg} 2x = 0 \Leftrightarrow 2\sin 2x \cdot \cos 2x \cdot \cos x \cdot \frac{\sin 2x}{\cos 2x} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2x = 0, \\ \cos 2x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \sin 2x = 0 \Leftrightarrow 2x = k\pi,\ k \in Z \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2},\ k \in Z.$

Ats.: $\frac{k\pi}{2},\ k \in Z.$

3. $\frac{2\sin^2 x - 3\sin x + 1}{\cos^2 x - \cos x} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0, \\ \cos^2 x - \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (\sin x - 1)\left(\sin x - \frac{1}{2}\right) = 0, \\ \cos x\,(\cos x - 1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \sin x - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in Z.$

Ats.: $(-1)^k \frac{\pi}{6} + k\pi,\ k \in Z.$

4. $\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 1 + \cos 2x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = 2\cos^2 x \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\ 2\sin\frac{\pi}{6}\cdot\cos x = 2\cos^2 x \Leftrightarrow \cos x - 2\cos^2 x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ \cos x(1-2\cos x) = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0 \quad \text{arba} \quad \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k\in Z, \text{arba } x = \pm\frac{\pi}{3} + 2n\pi,\ n\in Z.$$

Ats.: $\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in Z;\ \pm\frac{\pi}{3}+2n\pi,\ n\in Z.$

5. $\sin\left(\frac{3\pi}{5}+x\right) = 2\sin\left(\frac{\pi}{5}-\frac{x}{2}\right) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\ \sin\left(\frac{3\pi}{5}+x\right) = 2\cos\left(\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{5}-\frac{x}{2}\right)\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ \sin\left(\frac{3\pi}{5}+x\right) = 2\cos\left(\frac{3\pi}{10}+\frac{x}{2}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ \sin 2\left(\frac{3\pi}{10}+\frac{x}{2}\right) = 2\cos\left(\frac{3\pi}{10}+\frac{x}{2}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ 2\cos\left(\frac{3\pi}{10}+\frac{x}{2}\right)\cdot\left(\sin\left(\frac{3\pi}{10}+\frac{x}{2}\right)-1\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ \cos\left(\frac{3\pi}{10}+\frac{x}{2}\right) = 0 \text{ arba } \sin\left(\frac{3\pi}{10}+\frac{x}{2}\right) = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ \cos\left(\frac{3\pi}{10}+\frac{x}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{3\pi}{10}+\frac{x}{2} = \frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in Z, \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ x = \frac{2\pi}{5}+2k\pi,\ k\in Z, \Leftrightarrow x = \frac{2(1+5k)}{5}\pi,\ k\in Z.$$

Ats.: $\frac{2(1+5k)}{5}\pi,\ k\in Z.$

6. Pakėlę abi nelygybės puses kvadratu, gausime:

$\sin^2 x > \cos^2 x \Leftrightarrow \cos^2 x - \sin^2 x < 0 \Leftrightarrow \cos 2x < 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi < 2x < \dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in Z, \Leftrightarrow \dfrac{\pi}{4} + k\pi < x < \dfrac{3\pi}{4} + k\pi,$

$k \in Z$.

Ats.: $\dfrac{\pi}{4} + k\pi < x < \dfrac{3\pi}{4} + k\pi,\ k \in Z$.

7. $4\cos x - \sin 2x > 0 \Leftrightarrow \cos x \cdot (2 - \sin x) > 0 \Leftrightarrow \cos x > 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in Z$.

Ats.: $-\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in Z$.

8. $\sqrt{2\sin x} < 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \geq 0, \\ \sin x < \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \in \left[2\pi k; \dfrac{\pi}{6} + 2\pi k\right) \cup \left(\dfrac{5\pi}{6} + 2\pi k; \pi + 2\pi k\right],\ k \in Z$.

Ats.: $x \in \left[2\pi k; \dfrac{\pi}{6} + 2\pi k\right) \cup \left(\dfrac{5\pi}{6} + 2\pi k; \pi + 2\pi k\right],\ k \in Z$.

9. $\cos^2 x + \sin x \cdot \cos x \geq 1 \Leftrightarrow 2\cos^2 x + 2\sin x \cos x \geq 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1 + \cos 2x + \sin 2x \geq 2 \Leftrightarrow \sin 2x + \cos 2x \geq 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos(2x - \dfrac{\pi}{4}) \geq \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow -\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi \leq 2x - \dfrac{\pi}{4} \leq \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in Z, \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k\pi \leq x \leq \dfrac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in Z$.

Ats.: $k\pi \leq x \leq \dfrac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in Z$.

10. $|\sin x|\cos x > \frac{1}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \geq 0, \\ \sin x \cos x > \frac{1}{4} \end{cases}$ arba $\begin{cases} \sin x < 0, \\ -\sin x \cos x > \frac{1}{4}. \end{cases}$

Išspręskime nelygybę $\sin x \cos x > \frac{1}{4}$:

$$\sin x \cos x > \frac{1}{4} \Leftrightarrow \sin 2x > \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\pi}{6} + 2k\pi < 2x < \frac{5\pi}{6} + 2k\pi,$$

$k \in Z$, $\Leftrightarrow \frac{\pi}{12} + k\pi < x < \frac{5\pi}{12} + k\pi$, $k \in Z$.

Tuomet $\begin{cases} \sin x \geq 0, \\ \sin x \cos x > \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2n\pi \leq x \leq \pi + 2n\pi, n \in Z, \\ \frac{\pi}{12} + k\pi < x < \frac{5\pi}{12} + k\pi, k \in Z, \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{\pi}{12} + 2m\pi < x < \frac{5\pi}{12} + 2m\pi$, $m \in Z$.

Analogiškai nagrinėkime antrąją sistemą:

$-\sin x \cos x > \frac{1}{4} \Leftrightarrow \sin 2x < -\frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{7\pi}{6} + 2k\pi < 2x < \frac{11\pi}{6} + 2k\pi$, $k \in Z, \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{7\pi}{12} + k\pi < x < \frac{11\pi}{12} + k\pi$, $k \in Z$.

Tuomet

$\begin{cases} \sin x < 0, \\ -\sin x \cos x > \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \pi + 2m\pi < x < 2\pi + 2m\pi, \ m \in Z, \\ \frac{7\pi}{12} + k\pi < x < \frac{11\pi}{12} + k\pi, \ k \in Z, \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{7\pi}{12} + (2n+1)\pi < x < \frac{11\pi}{12} + (2n+1)\pi$, $n \in Z$.

Ats.: $\frac{\pi}{12} + 2m\pi < x < \frac{5\pi}{12} + 2m\pi$, $m \in Z$;

$\frac{7\pi}{12} + (2n+1)\pi < x < \frac{11\pi}{12} + (2n+1)\pi$, $n \in Z$.

AŠTUNTOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

1. Tokios sekos galėtų būti:

$$1, 3, 7, 13, \ldots, n^2 - n + 1, \ldots;$$

$$1, 3, 7, 19, \ldots, n^3 - 5n^2 + 10n - 5, \ldots$$

2. Rekurentiniame sąryšyje

$$a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} + a_{n-3}, \quad n = 4, 5, \ldots$$

paėmę $n = 6$, turėsime

$$a_6 = a_5 + 2a_4 + a_3 \text{ arba } 0 = 1 + 2a_4 + 1,$$

$$a_4 = -1.$$

Turėdami a_3, a_4, a_5, panašiu būdu galime rasti a_2:

$$a_5 = a_4 + 2a_3 + a_2 \text{ (imame } n = 5\text{)},$$

$$1 = -1 + 2 + a_2,$$

$$a_2 = 0.$$

Taip pat surandame ir a_1:

$$a_4 = a_3 + 2a_2 + a_1 \ (n = 4),$$

$$-1 = 1 + 0 + a_1,$$

$$a_1 = -2.$$

Ats.: –2.

3. Gretimų narių skirtumas

$$a_{n+1} - a_n = \frac{2(n+1)+3}{6(n+1)-5} - \frac{2n+3}{6n-5} = \frac{-28}{(6n+1)(6n-5)}$$

yra neigiamas, kai $n = 1, 2, 3, \ldots$ Taigi visada

$$a_{n+1} - a_n < 0 \text{ arba } a_{n+1} < a_n.$$

Seka $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ yra mažėjanti.

4. Seka yra monotoniškai didėjanti tada ir tik tada, kai gretimų narių skirtumai $a_{n+1} - a_n$ yra teigiami. Šie skirtumai mūsų nagrinėjamai sekai yra tokie:

$$a_{n+1}-a_n=\frac{a(n+1)+b}{c(n+1)+d}-\frac{an+b}{cn+d}=\frac{ad-bc}{(cn+c+d)(cn+d)}.$$

Kadangi a, b, c, d yra teigiami skaičiai, tai $a_{n+1}-a_n$ bus teigiami, kai $ad>bc$.

Ats.: $ad>bc$.

5. 1. Dešimtasis sekos narys

$$a_{10}=S_{10}-S_9=(2\cdot 10^2+3\cdot 10)-(2\cdot 9^2+3\cdot 9)=41.$$

Ats.: 41.

2. Seka yra aritmetinė progresija tada ir tik tada, kai gretimų narių skirtumai yra pastovūs:

$$a_{n+1}-a_n=d,\ n=1,2,\ldots$$

Bendrasis sekos narys

$$a_n=S_n-S_{n-1}=(2n^2+3n)-(2(n-1)^2+3(n-1))=4n+1.$$

Todėl

$$a_{n+1}-a_n=(4(n+1)+1)-(4n+1)=4,\ n=1,2,\ldots$$

Taigi seka $a_1, a_2, \ldots, a_n=4n+1, \ldots$ yra aritmetinė progresija.

6. 1. Skaičiai $\sqrt{x}$, $\sqrt[3]{x}$, $\sqrt[4]{x}$ sudaro aritmetinę progresiją, kai gretimų narių skirtumai sutampa:

$$\sqrt[3]{x}-\sqrt{x}=\sqrt[4]{x}-\sqrt[3]{x}. \qquad (1)$$

Pažymėkime $\sqrt[12]{x}=t$, tuomet vietoje (1) lygties turėsime lygtį

$$t^4-t^6=t^3-t^4.$$

Ją pertvarkę, gauname

$$t^4(1-t^2)=t^3(1-t),\ t^4(1-t)(1+t)-t^3(1-t)=0,$$

$$t^3(1-t)(t^2+t-1)=0.$$

Jos sprendiniai

$$t_1=0,\ t_2=1,\ t_{3,4}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}.$$

Atitinkamai

$$x_1 = 0,\ x_2 = 1,\ x_{3,4} = \left(\frac{1 \mp \sqrt{5}}{2}\right)^{12} = 161 \mp 72\sqrt{5}.$$

Ats.: 0; 1; $161 \mp 72\sqrt{5}$.

2. Skaičiai $\sqrt{x}$, $\sqrt[3]{x}$, $\sqrt[4]{x}$ sudaro geometrinę progresiją, kai gretimų narių santykiai sutampa:

$$\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt[3]{x}}. \qquad (2)$$

Iš (2) lygybės turime $\frac{1}{\sqrt[6]{x}} = \frac{1}{\sqrt[12]{x}}$. Pakėlę 12-tuoju laipsniu, o po to padauginę iš x^2 ($x \neq 0$, nes seka 0, 0, 0 geometrine progresija nelaikoma), gausime $\frac{1}{x^2} = \frac{1}{x}$, $x = 1$.

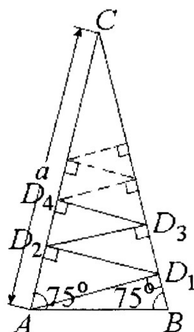
Patikrinę, įsitikiname, kad tai tikrai yra (2) lygties sprendinys.

Ats.: 1.

3. Iš gautų rezultatų išplaukia, kad skaičiai $\sqrt{x}$, $\sqrt[3]{x}$, $\sqrt[4]{x}$ sudarys kartu ir aritmetinę, ir geometrinę progresiją, kai $x = 1$.

Ats.: 1.

7. Iš stačiojo trikampio AD_1C išplaukia, kad $AD_1 = \frac{a}{2}$.



Trikampis AD_1D_2 taip pat status ir $\angle AD_1D_2 = 30°$. Taigi $D_1D_2 = AD_1 \cos 30° = \frac{a}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}$. Samprotaudami lygiai taip pat, gausime, kad

$$D_2D_3 = D_1D_2 \cos 30° = \frac{a}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2,$$

$$D_3D_4 = D_2D_3\cos 30^\circ = \frac{a}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3,$$

....,

$$D_{n-1}D_n = D_{n-2}D_{n-1}\cos 30^\circ = \frac{a}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n-1},$$

....

Todėl

a) laužtės $AD_1D_2D_3$ ilgis

$$AD_1D_2D_3 = \frac{a}{2} + \frac{a}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{a}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{a(7+2\sqrt{3})}{8};$$

b) laužtės $AD_1D_2 \ldots D_n$ ilgis (naudojame baigtinės geometrinės progresijos narių sumos formulę)

$$AD_1D_2 \ldots D_n = \frac{a}{2} + \frac{a}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} + \ldots + \frac{a}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n-1} =$$

$$= \frac{\frac{a}{2}\left(1-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n\right)}{1-\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{a\left(1-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n\right)}{2-\sqrt{3}} = a\left(2+\sqrt{3}\right)\left(1-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n\right);$$

c) begalinės laužtės $AD_1D_2 \ldots D_n \ldots$ ilgis (naudojame begalinės nykstamosios geometrinės progresijos narių sumos formulę)

$$AD_1D_2 \ldots D_n \ldots =$$

$$= \frac{a}{2} + \frac{a}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} + \ldots + \frac{a}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n-1} + \ldots = \frac{\frac{a}{2}}{1-\frac{\sqrt{3}}{2}} = a\left(2+\sqrt{3}\right).$$

Ats.: a) $\frac{a(7+2\sqrt{3})}{8}$; b) $a\left(2+\sqrt{3}\right)\left(1-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n\right)$; c) $a\left(2+\sqrt{3}\right)$.

8. Pažymėkime pasirinktos geometrinės progresijos pirmąjį narį $a_1 = \frac{1}{2^k}$ (čia k gali būti lygus 1, 2, 3, ...), o vardiklį $q = \frac{1}{2^m}$ (čia m taip pat gali būti vienas iš natūraliųjų skaičių 1, 2, 3, ...). Sudarytosios progresijos nariai bus uždavinio sąlygoje duotosios sekos nariai (kai kuriuos iš jų praleidžiant arba, kai $k = m = 1$, imant visus). Gautosios geometrinės progresijos narių suma

$$S = \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k+m}} + \frac{1}{2^{k+2m}} + \ldots + \frac{1}{2^{k+(n-1)m}} + \ldots =$$

$$= \frac{\frac{1}{2^k}}{1 - \frac{1}{2^m}} = \frac{2^m}{2^k(2^m - 1)}.$$

1. Prilyginkime gautą sumą $\frac{1}{5}$:

$$\frac{2^m}{2^k(2^m - 1)} = \frac{1}{5}.$$

Tai ekvivalentu lygybei

$$2^k(2^m - 1) = 2^m \cdot 5. \qquad (3)$$

Kadangi nei 5, nei $2^m - 1$ nesidalija iš 2, tai dvejetų rodikliai turi sutapti, t.y. $k = m$. Vietoje (3) lygybės turėsime

$$2^m - 1 = 5, \quad 2^m = 6.$$

Matome, kad pastaroji lygtis sprendinių, kai m gali įgyti tik natūraliąsias reikšmes, neturi.

2. Sumą S prilyginę $\frac{1}{15}$, turėsime

$$\frac{2^m}{2^k(2^m - 1)} = \frac{1}{15}, \quad 2^k(2^m - 1) = 2^m \cdot 15.$$

Nesunku gauti, kad šios lygties sprendiniais bus skaičiai $k = m = 4$.

Ats.: 1. Negalima;
2. Galima.

9. Duotosios sekos pirmieji skirtumai:

$$10, 22, 40, \ldots, (n+1)((n+1)^2+3)-n(n^2+3)=3n^2+3n+4, \ldots;$$

antrieji skirtumai:

$$12, 18, \ldots, 3(n+1)^2+3(n+1)+4-(3n^2+3n+4)=6n+6, \ldots;$$

tretieji skirtumai:

$$6, \ldots, 6(n+1)+6-(6n+6)=6, \ldots$$

Tretieji skirtumai yra pastovūs, todėl turime trečiosios eilės aritmetinę progresiją. Jos pirmųjų n narių suma

$$S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2!}\Delta a_1 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\Delta^2 a_1 +$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}\Delta^3 a_1 = n\cdot 4 + \frac{n(n-1)}{2!}\cdot 10 +$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cdot 12 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}\cdot 6 =$$

$$=\frac{n^4+2n^3+7n^2+6n}{4}=\frac{n(n+1)(n^2+n+6)}{4}.$$

Ats.: $\dfrac{n(n+1)(n^2+n+6)}{4}$.

10. Paskutiniame piramidės sluoksnyje (viršūnėje) yra 1 rutulys, priešpaskutiniame – 3 rutuliai, dar žemiau – 6 rutuliai, dar žemiau – 10 rutulių ir t.t. Jeigu n-tojo sluoksnio rutulių skaičių pažymėsime a_n, tai $n+1$-ojo sluoksnio rutulių skaičius $a_{n+1}=a_n+n+1$. Turime seką, kurios nariai – piramidės sluoksnių rutulių skaičiai:

$$1, 3, 6, 10, \ldots, a_n, \ldots \qquad (4)$$

Šios sekos pirmieji skirtumai:

$$2, 3, 4, \ldots, a_{n+1}-a_n=n+1, \ldots;$$

antrieji skirtumai:

$$1, 1, \ldots, (n+1)+1-(n+1)=1, \ldots$$

Kadangi antrieji skirtumai pastovūs, tai (4) seka yra antrosios eilės aritmetinė progresija. Jos pirmųjų n narių suma

$$S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}\Delta a_1 + \frac{n(n-1)(n-2)}{6}\Delta^2 a_1 =$$

$$= n \cdot 1 + \frac{n(n-1)}{2} \cdot 2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{6} \cdot 1 = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}.$$

Piramidėje, turinčioje 18 sluoksnių, bus $S_{18} = 1140$ rutulių.

Ats.: a) 1140; b) $\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$.

BAIGIAMOSIOS UŽDUOTIES ATSAKYMAI

1. 0; 1; 4;   **2.** $[4; +\infty)$;   **3.** 48;   **4.** $\frac{5\pi}{3}$;   **5.** 10,5.

Baigiamąją užduotį skaitytojui siūlome išspręsti savarankiškai.

